دینامیک سیستم های کوانتومی ـ نگاشت ها ی مثبت

وحیدکریمی پورـ دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

۳ اردیبهشت ۱۴۰۲

۱ مقدمه

می دانیم که کلی ترین توصیف حالت یک سیستم با یک ماتریس چگالی داده می شود، زیرا از یک طرف ممکن است که هنوز هیچ آزمایش مشخصی برای تهیه سیستم در یک حالت خالص انجام نداده باشیم و از طرف دیگر ممکن است که سیستم ِ درکنترل ِ ما بخشی از یک سیستم بزرگترباشد. مثلاً ممکن است که ما تنها به یک فوتون از یک زوج فوتون درهم تنیده دسترسی داشته باشیم که فوتون دوم کیلومترها دور از ماباشد. ما می توانیم بر روی سیستمی که دردست ماست انواع آزمایشها را انجام دهیم، مثلا می توانیم این سیستم را اندازه گیری کنیم، یا اینکه با ایجاد برهم کنش هایی آن را متحول کنیم، می توانیم سیستمی در کنار آن قرار داده و سپس روی هر دو سیستم اندازه گیری کنیم. این اندازه گیری ها و تحول ها می توانند موضعی یاسرتاسری باشند به این معنا که می توانند کل سیستم و یا تنها بخشی را که در دست ماست تحت تاثیر قرار دهند. نهایتاً همه این اعمال باعث می شوند که ماتریس چگالی سیستم ما یعنی ρ به یک ماتریس چگالی دیگر یعنی ρ' متحول شود. ماتریس چگالی سیستم دوم می تواند حتی مربوط به یک سیستم بزرگ تر باشد.

سوالی که در این درس به آن خواهیم پرداخت این است که ماتریس ρ' چه ربطی به ماتریس ِ ρ دارد و خواص نگاشتی که این دو را به هم ربط می دهد چیست؟ این نگاشت می بایست نشان دهنده کلی ترین عملی باشد که در چارچوب مکانیک کوانتومی بر یک ماتریس چگالی قابل تصور

است.

۲ نمادگذاری

فضای هیلبرت یک سیستم A را با H_A نمایش می دهیم. این فضا یک فضای برداری ضرب داخلی و مختلط [1] است. مختلط بودن آن به دلیل ویژگی هایی که خواهد داشت مهم است. هم چنین اگر این فضا محدودبعد باشد، حتما یک فضای هیلبرت [2] هم هست. مجموعه تمام عملگرهای خطی بر روی این فضا را با $L(H_A)$ نمایش می دهیم. بنابراین $T \in L(H_A)$ به این معناست که $T : H_A \longrightarrow H_A$ یک عملگر خطی است.

عملگر مثبت عملگری است که ارزش انتظاری آن روی هر برداری مقداری نامنفی باشد، یعنی اینکه

$$\langle v|X|v\rangle \geq 0 \qquad \forall \ v \in H_A. \tag{۱}$$

در یک فضای حقیقی یک عملگر مثبت الزاما هرمیتی نیست. به عنوان مثال عملگر $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ در یک فضای برداری حقیقی مثبت است، ولی هرمیتی نیست. دلیل مثبت بودن اش هم این است که

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a+b)^2 \geq 0.$$

اما در یک فضای مختلط هر عملگر مثبتی حتما هرمیتی است. دلیل آن هم چنین است: نخست ثابت می کنیم که

$$\langle v|X^\dagger|v\rangle = \overline{\langle v|X|v\rangle}.$$

از مثبت بودن $\langle v|X|v\rangle$ و در نتیجه حقیقی بودن آن، نتیجه می گیریم که

$$\langle v|X^\dagger|v\rangle = \langle v|X|v\rangle, \qquad \forall \ v$$

[1] Inner Product Complex Vector Space

[2] Hilbert Space

و یا

$$\langle v|X - X^\dagger|v\rangle = 0 \qquad \forall\, v.$$

اما چنین چیزی به این معناست که $X = X^\dagger$، یعنی اینکه X هرمیتی است.

زیر مجموعه ای از $L(H_A)$ که تنها در بردارنده عملگرهای خطی مثبت است با $L^+(H_A)$ نشان داده می شود. زیر مجموعه ای از $L^+(H_A)$ که عبارت است از مجموعه تمام عملگرهایی که رد آن ها برابر با یک است، با $D(H_A)$ نمایش داده می شود، بنابراین

$$D(H_A) \subset L^+(H_A) \subset L(H_A).$$

این مجموعه آخری یعنی $D(H_A)$ $D(H_A)$ مجموعه تمام ماتریس های چگالی است و یک مجموعه محدب است و یک زیر فضای برداری نیست هرگاه فضای H_A یک فضای d بعدی باشد، $L(H_A)$ یک فضای d^2 بعدی است. $D(H_A)$ یک زیر فضا نیست بلکه یک زیرمجموعه از $L(H_A)$ است که برای مشخص کردن هر نقطه از آن $d^2 - 1$ پارامتر حقیقی مورد نیاز است.

۳ نگاشت های مثبت، کاملا مثبت و کانال های کوانتومی

فرض کنید که نگاشتی که ρ را به ρ' می نگارد با $\mathcal{E}$ نشان دهیم. برای حفظ کلیت حتی می توان فرض کرد که بعدِ ρ و ρ' یکی نباشد. یعنی اینکه $\rho \in D(H_1)$ و $\rho' \in D(H_2)$. دراین صورت می نویسیم

$$\mathcal{E} : D(H_1) \longrightarrow D(H_2). \qquad (۲)$$

خواصی که نگاشت خطی $\mathcal{E}$ دارد آن است که :

یک : ماتریس هرمیتی را به ماتریس هرمیتی می نگارد.

دو : ماتریس مثبت را به ماتریس مثبت می نگارد.

سه : رد ماتریس را حفظ می کند.

به چنین نگاشتی یک ابر عملگر [3] یا یک نگاشت مثبت و ردّ نگه دار $Trace\ Preserving\ Positive\ Map$ می گوییم. هم چنین به نگاشت $\mathcal{E}$ یک ابرعملگر[4] گفته می شود. معمولا این نگاشت ها را نه فقط برای ماتریس های چگالی بلکه برای کلیه ماتریس های مثبت تعریف می کنیم. یعنی می نویسیم:

$$\mathcal{E} : L^+(H_1) \longrightarrow L^+(H_2). \tag{۳}$$

در این صورت ملاک های سه گانه بالا به شکل زیر تعمیم می یابند:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X^\dagger) &= \mathcal{E}(X)^\dagger \\ Tr(\mathcal{E}(X)) &= Tr(X). \end{aligned} \tag{۴}$$

توجه کنید که دامنه و برد این نگاشت به صورت بدیهی بیان می کند که عملگرهای مثبت به عملگرهای مثبت نگاشته می شوند. اما این ها تنها خواص ابر نگاشت $\mathcal{E}$ نیستند. ابرنگاشت $\mathcal{E}$ یک خاصیت مهم دیگر نیز دارد. برای فهم این خاصیت به شکل (۷) توجه می کنیم. در این شکل می بینیم که آلیس در آزمایشگاه خودش روی ذره ای که در اختیارش است عمل $\mathcal{E}$ را انجام می دهد. در خارج از آزمایشگاه آلیس هیچ اتفاقی نمی افتد. ممکن است که ذره ی در دست آلیس با ذره یا ذرات دیگری در خارج از آزمایشگاه آلیس، مثلا در دست باب، درهم تنیده باشد. سیستم آلیس را با A و سیستم باب را با B نشان می دهیم. در این صورت حالت ذراتی که در دست آلیس و باب هستند را با ρ_{AB} نشان می دهیم. عمل آلیس روی این حالت به صورت $\mathcal{E}\otimes I$ نشان داده می شود. این عمل ماتریس چگالی ρ_{AB} را به یک ماتریس چگالی دیگر تبدیل می کند. بنابراین ابرنگاشت $\mathcal{E}$ دارای این خاصیت است که گسترش آن نیز به شکل $\mathcal{E}\otimes I$ یک نگاشت مثبت است. از انجا که حالت باب و در نتیجه فضای هیلبرت سیستم او می تواند دلخواه باشد، به این نتیجه می رسیم که هر نوع گسترشی از ابر عملگر $\mathcal{E}$ (یعنی به هر بعدی)می بایست مثبت باشد. به این ترتیب به تعریف مهم زیر می رسیم:

■ تعریف: فرض کنید که $\mathcal{E} : L(V) \longrightarrow L(V)$ نگاشتی مثبت از فضای عملگرهای روی V به عملگرهای روی همان فضا باشد. دراین جا منظور از $L(V)$ فضای عملگرهای از V به V است. دراین صورت این نگاشت را کاملاً مثبت $Completely\ Positive$ می گوییم

[3] Super Operator

[4] Superoperator

شکل ۱: تمام اعمالی که آلیس روی سیستم خود انجام می دهد با یک نگاشت مثبت قابل بیان هستند.

اگر به ازای هر فضای W نگاشت زیر نیز مثبت باشد:

$$\mathcal{E}\otimes I : L(V\otimes W)\longrightarrow L(V\otimes W). \tag{۵}$$

هرگاه این نگاشت رد را نیز حفظ کند آنگاه نگاشت را کاملا مثبت و رد نگه دار [۵] می نامیم.

واضح است که این شرط یعنی مثبت بودن هر نوع گسترشی از نگاشت $\mathcal{E}$ یک شرط کاملا غیر بدیهی است. بنابراین بسیاری از نگاشت های مثبت ممکن است کاملا مثبت نباشند. بهتراست مثالی از یک نگاشت مثبت ولی نه کاملاً مثبت ارایه دهیم تا معلوم شود که همه نگاشت های مثبت کاملاً مثبت نیستند. این مثال چیزی نیست جز عملگری که یک ماتریس را به ترانهاده آن می نگارد.

■ **مثالی از یک عملگر مثبت که کاملاً مثبت نیست.** نگاشت ترانهاده را در نظر بگیرید که به صورت زیر عمل می کند:

$$\mathcal{E}:\rho\longrightarrow\rho^T \tag{۶}$$

حال گسترش این نگاشت به طریقی که در شرط 5 آمده است به صورت زیر خواهد بود که درآن یک از این حقیقت استفاده کرده ایم که یک ماتریس دلخواهِ ρ را همواره می توان به صورت $\rho=\sum_i a_i\otimes b_i$ تجزیه کرد:

$$(\mathcal{E}\otimes I)(\rho)=(\mathcal{E}\otimes I)(\sum a_i\otimes b_i)=\sum a_i^T\otimes b_i=\rho^{T_A}. \tag{۷}$$

[۵] Completely Positive Trace-preserving map (CPT)

این عملگر در واقع عناصر اول را در ضرب تانسوری ترانهاده می کند و عناصر دوم را دست نخورده باقی می گذارد. به همین دلیل آن را با نماد $\rho \longrightarrow \rho^{T_A}$ نمایش می دهیم. تعریف مشابهی برای $\rho \longrightarrow \rho^{T_B}$ وجود دارد. (دراین جا فرض کرده ایم که فضای برداری V و W به ترتیب فضاهای برداری سیستم های A و B هستند.) اثر ترانهاده جزیی به شکل صریح عبارت است از:

$$(\rho^{T_A})_{i\mu,j\nu} = (\rho)_{j\mu,i\nu}, \qquad (\rho^{T_B})_{i\mu,j\nu} = (\rho)_{i\nu,j\mu}. \tag{۸}$$

به عنوان مثال صریح تر اگر ρ به شکل ماتریس زیر باشد:

$$\rho = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \tag{۹}$$

آنگاه ماتریس های ρ^{T_A} و ρ^{T_B} به ترتیب عبارتند از:

$$\rho^{T_A} = \begin{pmatrix} a & b & i & j \\ e & f & m & n \\ c & d & k & l \\ g & h & o & p \end{pmatrix}, \tag{۱۰}$$

و

$$\rho^{T_B} = \begin{pmatrix} a & e & c & g \\ b & f & d & h \\ i & m & k & o \\ j & n & l & p \end{pmatrix}. \tag{۱۱}$$

حال دقت می کنیم که نگاشت ترانهاده واقعا یک نگاشت خطی و مثبت است زیرا ویژه مقادیر یک ماتریس را تغییر نمی دهد. اما توسعه

این عملگر و تعریف ترانهاده جزیی یک عملگر مثبت نخواهد بود. برای مثال ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & x & y & \\ & y & x & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{۱۲}$$

ویژه مقادیر این ماتریس عبارتند از $1,\ 1,\ x+y,\ x-y$ که هرگاه $x>y>0$ باشد همگی مثبت خواهند بود. اما اگر ترانهاده جزیی این ماتریس را حساب کنیم بدست می آوریم:

$$\rho^{T_A} = \begin{pmatrix} 1 & & & y \\ & x & & \\ & & x & \\ y & & & 1 \end{pmatrix} \tag{۱۳}$$

که ویژه مقادیرش عبارتند از $x,\ x,\ 1+y,\ 1-y$ که اگر $y>1$ باشد می تواند مقدار منفی داشته باشد. با این مثال نشان داده‌ایم که نگاشت ترانهاده یک نگاشت خطی مثبت است ولی کاملاً مثبت نیست.

■ تمرین: نشان دهید که هرگاه $X \in L(H_A \otimes H_B)$ یک ماتریس به شکل بلوکی زیر باشد:

$$X = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \tag{۱۴}$$

انگاه داریم:

$$X^{T_A} = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}, \qquad X^{T_B} = \begin{pmatrix} P^T & Q^T \\ R^T & S^T \end{pmatrix}. \tag{۱۵}$$

دقت کنید که اگرچه انگیزش تعریف نگاشت های کاملا مثبت و رد نگاه دار مربوط به حفظ شدن خواص فیزیکی ماتریس چگالی است اما به طور کلی این نوع نگاشت ها را می توان روی کل فضای تبدیلات خطی تعریف کرد. بنابراین یک بار دیگر این نگاشت ها را به صورت جامع تری تعریف می کنیم:

■ تعریف: یک نگاشت خطی $\mathcal{E} : L(H_A) \longrightarrow L(H_B)$ یک نگاشت کاملا مثبت رد نگه دار خوانده می شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}(X^\dagger) = (\mathcal{E}(X))^\dagger \\ &tr\,(\mathcal{E}(X)) = tr(X) \\ &\forall\ H_C, \quad \mathcal{E} \otimes id : L(H_A \otimes H_C) \longrightarrow L(H_B \otimes H_C) \geq 0. \end{aligned} \tag{۱۶}$$

به این نکته می بایست توجه کرد که

$$L(H_A \otimes H_C) = L(H_A) \otimes L(H_C). \tag{۱۷}$$

دقت کنید که شرط آخر به عنوان یک حالت خاص مثبت بودن خود نگاشت $\mathcal{E}$ را در بر دارد زیرا می توان H_C را برابر با فضای یک بعدی اعداد مختلط گرفت و از تساوی $V \otimes C \equiv V$ برای هر فضای برداری مختلط V استفاده کرد. چگونه می توان نگاشت های CPT را شناسایی کرد؟ فرم کلی این نگاشت ها چگونه است؟ قضیه زیر پاسخی به این سوال است که در پایان این درس اثبات آن را بررسی می کنیم:

■ قضیه کراوس [۶] : هر نگاشت CPT به فرم زیر است:

$$\mathcal{E}(X) = \sum_m A_m X A_m^\dagger, \tag{۱۸}$$

که درآن

$$\sum_m A_m^\dagger A_m = I. \tag{۱۹}$$

نگاشت های CPT را اصطلاحاً کانال های کوانتومی [۷] می گوییم.

■ تمرین: نشان دهید که هر نگاشتی که به صورت ۱۸ باشد، حتما یک نگاشت CPT است.

---

[۶] Kraus
[۷] Quantum Channel

وقتی که نگاشت کاملا مثبت را روی یک ماتریس چگالی مثل ρ و به شکل بالا می نویسیم تعبیر فیزیکی خیلی روشنی پیدا می کند. برای فهم این تعبیر دقت می کنیم که هرکدام از عناصر $A_m\rho A_m^\dagger$ یک ماتریس چگالی نیست زیرا اگر چه مثبت و هرمیتی است ولی رد آن یک نیست. ولی می توانیم رابطه ۱۸ را به شکل زیر بنویسیم:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_m tr(A_m\rho A_m^\dagger)\frac{A_m X A_m^\dagger}{tr(A_m\rho A_m^\dagger)} \equiv \sum_m P_m\rho_m, \tag{۲۰}$$

که در آن

$$P_m \equiv tr(A_m\rho A_m^\dagger) \tag{۲۱}$$

ها احتمال و

$$\rho_m = \frac{A_m X A_m^\dagger}{tr(A_m\rho A_m^\dagger)} \tag{۲۲}$$

ها ماتریس های چگالی هستند. در نتیجه می توان اثر یک نگاشت مثبت را به این صورت تعبیرکرد که حالت ρ تحت اثر این نگاشت به مخلوطی از حالت های چگالی هرکدام با احتمالات معین تبدیل می شود. می توانیم بگوییم که حالت ρ هنگام عبور از کانال با احتمال P_m دچار خطای A_m شده است و چون که نمی دانیم کدام خطا دقیقا رخ داده است حالت نهایی مخلوطی از تمام حالت های محتمل است.

- یک نکته در مورد نامگذاری: کانال کوانتومی یک نام کلی است که الزاما به ارسال یک حالت کوانتومی از جایی به جای دیگر اشاره نمی کند. کانال کوانتومی برای بیان هر نوع تغییر در حالت از جمله تحولات زمانی یا اندازه گیری نیز استفاده می شود.

۴ مدل های کلی از نگاشت های کاملا مثبت

۱.۴ اندازه گیری به عنوان یک نگاشت کاملا مثبت

یک نمونه از نگاشت های مثبت اندازه گیری است که همانطور که دیده ایم به صورت زیر عمل می کند:

$$\rho \longrightarrow \mathcal{E}(\rho) = \sum_m M_m \rho M_m^\dagger. \qquad (۲۳)$$

در این نگاشت عملگرهای کراوس همان M_m ها هستند. هرگاه M_m یک عملگر از $H_W \longrightarrow H_V$ باشد، $\mathcal{E}$ یک نگاشت کاملا مثبت از $L(H_V)$ به $L(H_W)$ است.

۲.۴ رد و رد جزیی به عنوان یک نگاشت کاملا مثبت

دراین بخش نشان می دهیم که محاسبه‌ی ردّ و ردّ جزیی نیز به عنوان نگاشت های کاملا مثبت قابل درک هستند. ردّ یک ماتریسِ حالت را به صورت زیر حساب می کنیم که درآن عدد $tr(\rho)$ را با عملگر $tr(\rho)|0\rangle\langle 0|$ دریک فضای یک بعدی یکی گرفته‌ایم:

$$tr(\rho) \equiv |0\rangle\langle 0| tr(\rho) = \sum_{i=1}^N \langle i|\rho|i\rangle \equiv \sum_{i=1}^N |0\rangle\langle i|\rho|i\rangle\langle 0| = \sum_{i=1}^N E_i \rho E_i^\dagger, \qquad (۲۴)$$

که نشان می دهد عملگرهای کراوس برای ردِّ جزیی عبارتند از:

$$E_i := |0\rangle\langle i|, \qquad E_i^\dagger = |i\rangle\langle 0|. \qquad (۲۵)$$

هم چنین می توان ردِّ جزیی یک عملگر را نیز به صورت یک کانال کوانتومی در نظر گرفت: داریم

$$tr_B(\rho) = \sum_{\mu=1}^N (I_A \otimes \langle\mu|)\rho(|I_A \otimes |\mu\rangle) \equiv \sum_{\mu=1}^N (I_A \otimes |0\rangle\langle\mu|)\rho(|I_A \otimes |\mu\rangle\langle 0|), \qquad (۲۶)$$

که نشان می دهد عملگرهای کراوس برای ردِّ جزیی عبارتند از:

$$E_\mu = I_A \otimes |0\rangle\langle\mu|, \qquad E_\mu^\dagger = I_A \otimes |\mu\rangle\langle 0|. \qquad (۲۷)$$

۳.۴ دینامیک سیستم های باز به عنوان یک نگاشت کاملا مثبت

در درس های مکانیک کوانتومی معمولاً گفته می شود که حالت یک سیستم کوانتومی یعنی $|\psi\rangle$ مطابق با معادله زیر در طول زمان تحول می یابد

$$\psi(t) = U(t)|\psi(0)\rangle, \tag{۲۸}$$

که درآن $U(t)$ یک عملگر یکانی است که از روی هامیلتونی برهم کنش بدست می آید. این رابطه البته تاموقعی برقرار است که سیستم کوانتومی با یک بردار حالتِ خالص توصیف شود. در غیر این صورت یعنی وقتی که حالت سیستم خالص نیست بلکه با یک ماتریس چگالی تعریف می شود، چنانکه در مکانیک آماری نیز دیده‌ایم معمولاً گفته می شود که ماتریس چگالی مطابق با رابطه زیر متحول می شود:

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger. \tag{۲۹}$$

این رابطه تحول زمانی ماتریس چگالی را تنها در یک حالت خاص بیان می کند و آن هنگامی است که برهم کنش بین سیستم کوانتومی و محیط آن ضعیف باشد و دراغلب موارد دیگر صحیح نیست. برای آنکه این موضوع را بخوبی دریابیم فرض کنید که در لحظه صفر، حالت سیستم که آن را با A نشان می دهیم و محیط آن که آن را با B نشان می دهیم به صورت زیر باشد:

$$\rho_{AB}(0) = \rho_A \otimes \rho_B. \tag{۳۰}$$

حال اگر هامیلتونی سیستم و محیط به شکل زیر باشد

$$H_{AB} = H_A \otimes I_B + I_A \otimes H_B \tag{۳۱}$$

دراین صورت عملگر تحول سیستم و محیط به شکل ساده زیر درخواهد آمد:

$$U_{AB}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{AB}t} = e^{-\frac{i}{\hbar}(H_A\otimes I_B + I_A\otimes H_B)t} = e^{-\frac{i}{\hbar}H_At} \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}H_Bt} = U_A(t)\otimes U_B(t). \tag{۳۲}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(t) &= U_{AB}(t)\rho_{AB}(0)U_{AB}^\dagger(t) = (U_A(t)\otimes U_B(t))\,\rho_{AB}(0)\left(U_A^\dagger(t)\otimes U_B^\dagger(t)\right) \\ &= \left(U_A(t)\rho_A(0)U_A^\dagger(t)\right)\otimes\left(U_B(t)\rho_B(0)U_B^\dagger(t)\right). \end{aligned} \tag{۳۳}$$

درنتیجه ماتریس چگالی سیستم بعد از گذشت زمان t برابر می شود با

$$\rho_A(t) = tr_B(\rho_{AB}(t)) = U_A(t)\rho_A(0)U_A^\dagger(t). \tag{۳۴}$$

که همان معادله 29 است. بنابراین ماتریس چگالی سیستم فقط موقعی به این صورتِ ساده تحول می یابد که برهم کنش بین سیستم و محیط برابر با صفر باشد و یااینکه فوق العاده کوچک باشد. حالت اخیر همانی است که در مکانیک آماری با آن مواجه هستیم. دراین درس می خواهیم دینامیک یک سیستم کوانتومی را برای وقتی که برهم کنش بین سیستم و محیط کوچک نیست بررسی کنیم. اهمیت این موضوع بدین سبب است که در کامپیوترهای کوانتومی و به طور کلی در سیستم های کوانتومی ای که در سالها و دهه های آینده با آن سروکار خواهیم داشت، یک سیستم کوانتومی می تواند تنها از یک یا چند اتم یا یون تشکیل شده باشد و برای چنین سیستمی برهم کنش های درون سیستم به همان اندازه مهم هستند که برهم کنش های بین سیستم و محیط.

برای آنکه دینامیک کلی یک سیستم را بررسی کنیم فرض می کنیم که در لحظه صفر سیستم در یک حالت $\rho_A(0)$ و محیط در یک حالت خالص $|e\rangle$ قرار دارد. در آینده در باره میزان اعتبار این فرض ها توضیح خواهیم داد. تحت این شرایط ماتریس چگالی سیستم ومحیط در لحظه t برابر خواهد بود با

$$\rho_{AB}(t) = U(t)(\rho_A(0)\otimes |e\rangle\langle e|)U^\dagger(t), \tag{۳۵}$$

که درآن $U(t)$ عملگر تحول سیستم ومحیط است. ماتریس چگالی سیستم با محاسبه ردّ جزیی روی محیط بدست می آید. درنتیجه بدست می آوریم

$$\rho_A(t) = tr_B(\rho_{AB}(t)) = tr_B\Big(U(t)(\rho_A(0)\otimes |e\rangle\langle e|)U^\dagger(t)\Big). \tag{۳۶}$$

به صورت جزئی تر می توانیم درایه های این ماتریس را به صورت زیر بدست آوریم. برای سادگی روابط نمادهای خلاصه زیر را به کار می بریم:

$$\rho_A(t) \longrightarrow \rho', \ \ U(t)\longrightarrow U, \ \ \rho_A(0)\longrightarrow \rho. \tag{۳۷}$$

در این صورت می نویسیم:

$$\begin{aligned}\rho'_{ij} &= \sum_m \langle i,m|U(\rho\otimes|e\rangle\langle e|)U^\dagger|j,m\rangle \\ &= \sum_{m,k,n,l,p} \langle i,m|U|k,n\rangle\langle k,n|\rho\otimes|e\rangle\langle e|l,p\rangle\langle l,p|U^\dagger|j,m\rangle\end{aligned} \tag{۳۸}$$

می توان پایه محیط را طوری گرفت که حالت $|e\rangle$ نیز عضوی از این پایه و در نتیجه بر بقیه حالت های محیط عمود باشد. در این صورت رابطه بالا به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\rho'_{ij} = \sum_{m,k,n,l,p} \langle i,m|U|k,n\rangle\langle k|\rho|l\rangle\langle n|e\rangle\langle e|p\rangle\langle l,p|U^\dagger|j,m\rangle$$

$$= \sum_{m,k,l} \langle i,m|U|k,e\rangle\langle k|\rho|l\rangle\langle l,e|U^\dagger|j,m\rangle. \quad (۳۹)$$

حال می توانیم عملگرهای M_m را که روی سیستم اثر می کنند با درایه هایشان به صورت زیر تعریف کنیم:

$$(M_m)_{i,k} := \langle i,m|U|k,e\rangle \quad (۴۰)$$

که معادل با تعریف زیر است:

$$M_m := \langle m|U|e\rangle, \quad (۴۱)$$

که در این صورت رابطه (۳۹) به صورت زیر در می آید:

$$\rho'_{ij} = \sum_{m,n,l} (M_m)_{ik}\rho_{kl}{(M_m)^\dagger}_{lj} \quad (۴۲)$$

و یا

$$\rho' = \sum_m M_m\rho M_m^\dagger, \quad (۴۳)$$

که درآن

$$M_m := \langle m|U|e\rangle, \quad (۴۴)$$

و $\{|m\rangle\}$ یک پایه متعامد یکه برای محیط است. دقت کنید که M_m ها عملگرهایی هستند که روی سیستم اثر می کنند. به این ترتیب دینامیک عمومی سیستم کوانتومی بدست می آید. عملگرهای M_m عملگرهای کراوس [۸] خوانده می شوند و تعداد آنهاحداکثر برابر با بعد فضای هیلبرت محیط است. از تعریف این عملگرها یعنی رابطه 44 براحتی می توان نشان داد که دارای خاصیت زیر هستند.

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I. \quad (۴۵)$$

اگر محیط در یک حالت خالص قرار نداشته باشد بلکه در یک حالت آمیخته مثل σ قرار داشته باشد می توانیم این حالت را تجزیه طیفی کنیم و بنویسیم:

$$\sigma = \sum_\nu p_\nu|e_\nu\rangle\langle e_\nu|. \quad (۴۶)$$

[۸] Kraus Operators

سپس از خطی بودن عملگر یکانی U و هم چنین خطی بودن رد استفاده کنیم و بدست بیاوریم که بازهم یک کانال کوانتومی به صورت زیر داریم:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{\mu,\nu} p_\nu A_{\mu,\nu} \rho A^\dagger_{\mu,\nu}, \tag{۴۷}$$

که در آن

$$A_{\mu,\nu} = \langle \mu | U | e_\nu \rangle. \tag{۴۸}$$

عملگرهای کراوس هستند.

۴.۴ وقتی که حالت جدید تابعی از حالت اولیه نیست!

تا کنون فرض کرده ایم که اگر حالت سیستم را در لحظه صفر بدانیم می توانیم حالت سیستم را در لحظات آینده نیز تعیین کنیم یعنی اینکه فرض کرده ایم

$$\rho(t) = f(\rho(0)).$$

اما این فرض درست نیست. همواره چنین نیست که حالت سیستم در لحظات بعد تابعی از حالت سیستم در لحظه صفر باشد و ممکن است برای تعیین حالت در لحظات آینده دانستن چیزی بیشتر از حالت سیستم در لحظه صفر لازم باشد. این وضعیت وقتی پیش می آید که در لحظه صفر بین محیط و سیستم در هم تنیدگی وجود داشته باشد. به مثال زیر می کنیم. فرض کنید که سیستم و محیط در لحظه صفر در حالت زیر باشند:

$$|\psi(0)\rangle_{se} = a|00\rangle + b|11\rangle, \tag{۴۹}$$

که برای سادگی a و b را نیز حقیقی گرفته ایم. در این صورت داریم

$$\rho_s(0) = a^2 |0\rangle\langle 0| + b^2 |1\rangle\langle 1| \tag{۵۰}$$

حال، سیستم و محیط تحت تاثیر دینامیک یکانی زیر قرار می گیرند:

$$\begin{aligned} |00\rangle &\longrightarrow |00\rangle \\ |01\rangle &\longrightarrow |01\rangle \end{aligned}$$

$$|10\rangle \longrightarrow |11\rangle$$
$$|11\rangle \longrightarrow -|10\rangle. \quad (۵۱)$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$|\psi(t)\rangle_{se} = a|00\rangle - b|10\rangle, \quad (۵۲)$$

و از آنجا

$$\rho_s(t) = |\psi\rangle\langle\psi| \qquad |\psi\rangle = a|0\rangle - b|1\rangle. \quad (۵۳)$$

از طرف دیگر فرض کنید که در لحظه صفر داشته باشیم:

$$|\psi(0)\rangle_{se} = a|01\rangle + b|10\rangle, \quad (۵۴)$$

که بازهم منجر به همان ماتریس چگالی در لحظه صفر برای سیستم می شود. اما این بار خواهیم داشت:

$$|\psi(0)\rangle_{se} = a|01\rangle + b|11\rangle, \quad (۵۵)$$

و در نتیجه

$$\rho_s(t) = |\phi\rangle\langle\phi|, \qquad |\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle. \quad (۵۶)$$

بنابراین اگر چه سیستم و محیط همان دینامیک را طی کرده اند و حالت اولیه سیستم نیز در دو مورد یکسان بوده است، اما حالت نهایی سیستم متفاوت است. دلیل اش هم این است که حالت نهایی سیستم علاوه بر حالت اولیه آن به همبستگی های سیستم با محیط هم بستگی دارد.

۵.۴ نگاشت های یونیتال

یک نگاشت کاملا مثبت، یک نگاشت یونیتال [۹] نامیده می شود هرگاه دارای خاصیت زیر باشد:

$$\mathcal{E}(\frac{I}{d}) = I$$

[۹] Unital

چنین نگاشتی حالت کاملا آمیخته را به حالت کاملا آمیخته می نگارد. عملگرهای کراوس این نگاشت دارای این خاصیت اضافه هستند که:

$$\sum_k A_k A_k^\dagger = I. \tag{۵۷}$$

برای کیوبیت ها یک نگاشت یونیتال را همواره می توان به صورت یک ترکیب محدب از نگاشت های یکانی نوشت به این معنا که

$$\mathcal{E} = \sum_k p_k U_k \rho U_k^\dagger. \tag{۵۸}$$

این کار در ابعاد بالاتر همواره امکان پذیر نیست. یک مثال مشهور از این نوع کانال موسوم به کانال لانداوو_استریتر [۱۰] است که به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mathcal{E}(X) = \frac{1}{j(j+1)}\Big(J_x X J_x + J_y X J_y + J_z X J_z\Big), \tag{۵۹}$$

که در آن J_a ها عملگرهای تکانه زاویه ای در نمایش اسپین j هستند.

۵ انبساط اشتاین_اشپرینگ

یکی از مهمترین قضایا در باره نگاشت های کاملا مثبت یا کانال های کوانتومی انبساط اشتاین اشپیرینگ [۱۱] نامیده می شود. برای فهم این قضیه نخست به کانال های ساده و سه گانه زیر توجه می کنیم که طی آنها یک ماتریس چگالی $\rho \in D(H_A)$ می تواند به روش های زیر تغییر کند:

یک _ (انبساط یا توسعه) به این معنا که ماتریس چگالی به شکل زیر و با قرار گرفتن در کنار یک ماتریس چگالی دیگر توسعه یابد:

$$\rho \longrightarrow \rho \otimes \sigma,$$

که در آن $\sigma \in D(H_B)$ یک ماتریس چگالی دلخواه است.

دو_ (تحول یکانی) به همان معنای متداول یعنی اینکه

$$\rho \longrightarrow U\rho U^\dagger.$$

[۱۰] Landau Streeter Channel

[۱۱] Steinspring Dilation

و بالاخره

سه: (رد جزئی) به این معنا که :

$$\rho \longrightarrow tr_A(\rho)$$

که در آن روی قسمتی از یک ماتریس چگالی رد گرفته و یک ماتریس چگالی در یک فضای کوچک تر بدست آورده ایم.

قضیه اشتاین اشپرینگ بیان می کند که هر نگاشت کاملا مثبت را می توان به صورت ترکیبی از این سه نگاشت مثبت در نظر گرفت. به این معنا که به ازای هر نگاشت کاملا مثبت $\mathcal{E}\ :\ D(H_A) \longrightarrow D(H_A)$ حتما یک فضای برداری $\mathcal{K}$ ، یک حالت مشخص مثل $\sigma \in D(\mathcal{K})$ و (که نباید با ماتریس پاوولی اشتباه گرفته شود) و هم چنین یک ماتریس یکانی $U : H_A\otimes K \longrightarrow H_A\otimes K$ وجود دارد به قسمی که

$$\mathcal{E}(\rho) = tr_{\mathcal{K}}\left[U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger\right]. \tag{۶۰}$$

این قضیه هم چنین بیان می کند که بعد فضای K را می توان به d^2 تقلیل داد که در آن d بعد فضای H_A است.

به این ترتیب می بینیم که مدل تحول سیستم باز در واقع می تواند هر نوع نگاشت کاملا مثبت را در بر گیرد.

■ تمرین: کانال بیت_برگردان را در نظر بگیرید. این کانال به صورت

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p\ X\rho X$$

تعریف می شود. انبساط اشتاین اشپرینگ را برای این کانال پیدا کنید. (راهنمایی: سیستم K را می توانید دو بعدی در نظر بگیرید و حالت σ را نیز برابر با یک حالت خالص مثلا $|0\rangle\langle 0|$ انتخاب کنید.

■ تمرین: مسئله قبلی را برای کانال فاز برگردان انجام دهید. همان راهنمایی در این جا نیز مفید است.

■ تمرین: تمرین قبلی را برای کانال واقطبش انجام دهید. در اینجا می بایست فضای K را چهار بعدی انتخاب کنید. راهنمایی: شاید بهتر باشد که حالت σ را برابر با یک حالت کاملا آمیخته انتخاب کنید.

۶ مثال های خاص از نگاشت های کاملا مثبت

در این بخش بعضی کانال های خاص را که از نظر کاربردی اهمیت بسیار دارند بررسی می کنیم. به همین دلیل عمده توجه ما در این بخش متوجه کانال هایی است که بر روی کیوبیت ها اثر می کنند، اگر چه در بعضی موارد تعمیم این نوع کانال ها را به ابعاد دیگر نیز بررسی می کنیم.

۱.۶ کانال بیت ـ برگردان

دراین کانال با احتمال $1-p$ حالتِ یک کیوبیت تغییر نمی کند و با احتمال p عملگر $X\equiv \sigma_x$ روی آن اثر می کند و بیت را برمی گرداند . یادآوری می کنیم که اثر عملگر پاوولی X روی یک کیوبیت چنین است: $X(a|0\rangle + b|1\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle)$. بنابراین اثر این کانال با نگاشت زیر تعریف می شود.

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + pX\rho X \tag{۶۱}$$

عملگرهای کراوس عبارتند از:

$$M_0 := \sqrt{1-p}I, \qquad M_1 := \sqrt{p}X. \tag{۶۲}$$

براحتی معلوم می شود که این کانال یک حالت که با بردارِ $\mathbf{r} = (x,y,z)$ در کره بلوخ مشخص می شود را به حالتی دیگر با بردارِ $\mathbf{r}'$ می نگارد. یعنی

$$\mathcal{E} : (x,y,z) \longrightarrow (x,(1-2p)y,(1-2p)z). \tag{۶۳}$$

بنابراین کانال بیت برگردان کره بلوخ را درامتداد صفحه عمود بر محور x به طور یکسان فشرده می کند. هرگاه $p=\frac{1}{2}$ باشد، کره بلوخ کاملاً تبدیل به یک پاره خط در امتداد محور x می شود و تمامی اطلاعات در جهات دیگر از بین می رود.

■ تمرین: دو کانال بیت برگردان با پارامترهای p و q یکی پس از دیگری روی یک کیوبیت اثر می کنند. کانال نهایی از چه نوعی است؟

■ تمرین: یک تار نوری که برای انتقال فوتون ها به کار می رود قطبش فوتون ها را با احتمال p کاملا عوض می کند (از حالت عمودی به افقی در می آورد و بالعکس) و با احتمال $1-p$ قطبش را عوض نمی کند. در آزمایشگاه روی یک متر از این تار نوری آزمایش می کنیم و متوجه می شویم که برای یک متر احتمال p برابر است با 0.001. هرگاه یک کیلومتر از این تار نوری داشته باشیم احتمال تعویض قطبش برای آن چقدر است؟ در باره معنای پاسخ خود می بایست دقت کنید زیرا یک کانال بیت برگردان که با احتمال ۱ بیت ها را برگرداند به اندازه کانالی که اصلا خطا ایجاد نمی کند می تواند مفید باشد ، زیرا در خروجی تمام بیت های دریافتی را برمی گردانیم تا بیت های ارسال شده بدست آید.

۲.۶ کانال فاز ـ برگردان

دراین کانال بجای خطای برگرداندن بیت، خطای تغییر فاز رخ می دهد به این معنا که با احتمالِ p عملگرِ $Z\equiv\sigma_z$ روی کیوبیت اثر می کند. درنتیجه اثر کانال با نگاشت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{E}(\rho)=(1-p)\rho+pZ\rho Z \tag{۶۴}$$

عملگرهای کراوس عبارتند از:

$$M_0:=\sqrt{1-p}I,\qquad M_1:=\sqrt{p}Z. \tag{۶۵}$$

$$\mathcal{E}:(x,y,z)\longrightarrow((1-2p)x,(1-2p)y,z). \tag{۶۶}$$

۳.۶ کانال واقطبش

در این کانال با احتمال $1-p$ حالت اولیه سالم به مقصد می رسد و با احتمالِ p تمام اطلاعات آن از بین می رود و به یک حالتِ کاملاً مخلوط تبدیل می شود. بنابراین اثر کانال به صورت زیراست:

$$\mathcal{E}(\rho)=(1-p)\rho+p\frac{I}{2} \tag{۶۷}$$

این کانال به صورت زیر روی کره بلوخ اثر می کند:

$$\mathcal{E} : \mathbf{r} \longrightarrow (1-p)\mathbf{r}. \tag{۶۸}$$

یعنی کانال واقطبش کره بلوخ را به صورت همسانگرد منقبض می کند. برای پیدا کردن عملگرهای کراوس از اتحاد زیر که خواننده خود می تواند براحتی آن را ثابت کند، استفاده می کنیم:

$$\rho + X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z = 2I \qquad \forall\rho \tag{۶۹}$$

باجایگذاری این رابطه در 67 به رابطه زیر می رسیم:

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1-3p}{4}\rho + \frac{p}{4}X\rho X + \frac{p}{4}Y\rho Y + \frac{p}{4}Z\rho Z. \tag{۷۰}$$

بنابراین عملگرهای کراوس عبارتند از:

$$M_0 := \sqrt{\frac{1-3p}{4}}I, \qquad M_1 := \sqrt{\frac{p}{4}}X \qquad M_2 := \sqrt{\frac{p}{4}}Y, \qquad M_3 := \sqrt{\frac{p}{4}}Z. \tag{۷۱}$$

بنابراین در کانال واقطبش هر سه خطای X, Y, Z با احتمال یکسان عمل می کنند. سه کانال گفته شده در بالا حالت های خاصی از کانال پاوولی هستند که در آن خطاهای گفته شده می توانند با احتمالات متفاوت رخ دهند.

- تمرین: یک تار نوری که برای انتقال فوتون ها به کار می رود قطبش فوتون ها را با احتمال $1-p$ عوض نمی کند و با احتمال p کاملا قطبش را از بین می برد. در آزمایشگاه روی یک متر از این تار نوری آزمایش می کنیم و متوجه می شویم که برای یک متر احتمال p برابر است با 0.001. هرگاه یک کیلومتر از این تار نوری داشته باشیم احتمال از بین بردن قطبش برای آن چقدر است؟

۴.۶ کانال میراکننده دامنه

فرض کنید که می خواهیم فوتون هایی تک رنگ را از یک نقطه به یک نقطه دیگر از طریق یک فیبر نوری یا هوا بفرستیم. حالت ورودی یا حالت سیستم برابر است با:

$$|\psi_A\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |n\rangle. \tag{۷۲}$$

دراین رابطه $|n\rangle$ نشان دهنده حالتی است که دقیقاً دارای n فوتون و $|0\rangle$ نشان دهنده خلأ است. دربین راه ممکن است این فوتون ها جذب محیط شده واز سیستم خارج شوند. کانال میراکننده دامنه کانالی است که چنین تحولی را نشان می دهد. برای سادگی حالت سیستم و محیط را در ابتدا به صورت زیر درنظرمی گیریم:

$$|\psi\rangle_A = a|0\rangle + b|1\rangle, \qquad |\psi\rangle_B = |0\rangle. \tag{۷۳}$$

بنابراین حالت سیستم بعلاوه محیط برابر خواهد بود با:

$$|\psi\rangle_{A,B} = a|0,0\rangle + b|1,0\rangle. \tag{۷۴}$$

حال فرض کنید که عملگر یکانی زیر روی سیستم و محیط اثر کند:

$$\begin{aligned}
|0,0\rangle &\longrightarrow |0,0\rangle \\
|0,1\rangle &\longrightarrow \cos\theta|0,1\rangle - \sin\theta|1,0\rangle \\
|1,0\rangle &\longrightarrow \sin\theta|0,1\rangle + \cos\theta|1,0\rangle \\
|1,1\rangle &\longrightarrow |1,1\rangle
\end{aligned} \tag{۷۵}$$

درنتیجه‌ی اثر این عملگر حالت نهایی سیستم و محیط عبارت خواهد بود از:

$$|\psi'\rangle_{A,B} = a|0,0\rangle + b\sin\theta|0,1\rangle + b\cos\theta|1,0\rangle. \tag{۷۶}$$

دقت کنید که شکل صریح حالت اولیه سیستم عبارت است از:

$$\rho_A = \begin{pmatrix} a\overline{a} & a\overline{b} \\ b\overline{a} & b\overline{b} \end{pmatrix} \tag{۷۷}$$

و شکل صریح حالت نهایی آن برابر است با:

$$\rho'_s = tr_e(|\psi'\rangle_{s,e}\langle\psi'|) = \begin{pmatrix} a\overline{a} + b\overline{b}\sin^2\theta & a\overline{b}\cos\theta \\ b\overline{a}\cos\theta & b\overline{b}\cos^2\theta \end{pmatrix} \tag{۷۸}$$

با مقایسه این دو ماتریس و کمی محاسبه می توان عملگرهای کراوس برای این کانال را بدست آورد.

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{۷۹}$$

ازآنجا که دراین کانال فوتون های سیستم جذب محیط می شوند و شدت نور ورودی کاهش می یابد به آن نام کانال میراکننده دامنه داده شده است.

۵.۶ کانال میراکننده دامنه در دمای غیر صفر

در مثال قبلی فرض کردیم که محیط در دمای صفرباشد و به همین دلیل هیچ فوتونی نداشته باشد. هرگاه محیط در دمای غیر صفر باشد حالت آن مخلوطی از حالت های $|0\rangle\langle 0|$ و $|1\rangle\langle 1|$ است که نسبت این دو حالت را در مخلوط، دما تعیین می کند. بنابراین فرض کنید که حالت اولیه محیط برابرباشد با:

$$\rho_e = (1-p)|0\rangle\langle 0| + p|1\rangle\langle 1|. \tag{۸۰}$$

دراین صورت براحتی می توان نشان داد که تحت تاثیر همان عملگریکانیِ مثال قبل ماتریس چگالی سیستم دچار تحول زیر می شود:

$$\rho = E_0\rho E_0^\dagger + E_1\rho E_1^\dagger + E_2\rho E_2^\dagger + E_3\rho E_3^\dagger. \tag{۸۱}$$

که درآن عملگرهای کراوس عبارتند از:

$$\begin{aligned} E_0 &= \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad E_1 = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E_2 &= \sqrt{p}\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_4 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{۸۲}$$

به این کانال، گاهی اوقات کانال تعمیم یافته میراکننده دامنه *Generalized Amplitude Damping Channel* نیز می گویند.

۶.۶ کانال میراکننده فاز

حالتِ $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ را در نظر بگیرید. این حالت ترکیب خطی دو حالتِ پایه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ بایک فازِ نسبی مشخص است. باورود به این کانال فاز نسبی این دو حالت بتدریج از بین می رود و حالت خروجی یک حالت مخلوط است. برای مدل سازی چنین کانالی فرض می کنیم که عملگری مثل $R_z(\theta)$ که روی حالت های ورودی $|0\rangle$ و $|1\rangle$ اختلاف فازِ θ ایجاد می کند به طور نامنظم و بایک تابع توزیع گاووسی روی حالت اثر کند. درنتیجه عمل این کانال به شرح زیراست:

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}\lambda}\int R_z(\theta)|\psi\rangle\langle\psi|R_z^\dagger(\theta)e^{-\frac{\theta^2}{4\lambda}}d\theta. \quad (۸۳)$$

ماتریس چگالی حالت ورودی که یک ماتریس چگالی خالص است به شکل زیراست:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b} \\ b\bar{a} & b\bar{b} \end{pmatrix} \quad (۸۴)$$

داریم

$$R_z(\theta)\rho R_z^\dagger(\theta) = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b}e^{i\theta} \\ b\bar{a}e^{-i\theta} & b\bar{b} \end{pmatrix} \quad (۸۵)$$

بامحاسبه انتگرال بدست می آوریم

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\rho) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b}e^{i\theta} \\ b\bar{a}e^{-i\theta} & b\bar{b} \end{pmatrix} e^{-\frac{\theta^2}{4\lambda}}d\theta \\ &= \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b}e^{-\lambda} \\ b\bar{a}e^{-\lambda} & b\bar{b} \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (۸۶)$$

که نشان می دهد جملات غیرقطری ماتریس چگالی با پارامترِ $e^{-\lambda}$ دچار میرایی می شوند. اگر به تعریف اولیه این کانال نگاه کنیم به نظر می رسد که با یک کانال با بی نهایت عملگر کراوس سروکار داریم. ولی وقتی به حالت نهایی نگاه کنیم درمی یابیم که حالت نهایی را تنها با دو عملگر

کراوس می توان از حالت اولیه بدست آورد. این دو عملگر عبارتند از:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\eta^2} \end{pmatrix} \tag{۸۷}$$

که در آن $\eta = e^{-\lambda}$. این نتیجه نشان می دهد که یک کانال معین می تواند نمایش های متنوعی با تعداد متفاوتی از عملگرهای کرواس داشته باشد. به این موضوع در ادامه این درس بازخواهیم گشت.

- **مثال: اندازه گیری و تهیه حالت.** فرض کنیم که در یک چیدمان آزمایشگاهی هر حالت ورودی را در پایه $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ اندازه می گیریم و بنابر احتمالاتی که در اثر اندازه گیری بدست می آوریم، حالت های $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ را تهیه می کنیم. در این صورت سازوکار آزمایشگاهی ما کاری که می کند توسط کانال زیر نشان داده می شود:

$$\mathcal{E}(\rho) = \rho_{00}|+\rangle\langle+| + \rho_{11}|-\rangle\langle-|. \tag{۸۸}$$

عملگرهای کراوس برای این کانال عبارتند از:

$$A_0 = |+\rangle\langle 0|, \qquad A_1 = |-\rangle\langle 1|. \tag{۸۹}$$

- **مثال: کانال یکانی های تصادفی:** [۱۲] کانال زیر عملگرهای یکانی را با احتمال یکنواختی که به نام اندازه هار [۱۳] شناخته می شود روی یک حالت ورودی اثر می دهد.

$$\mathcal{E}(\rho) = \int dU U\rho U^\dagger \tag{۹۰}$$

اندازه هار دارای این خاصیت است که:

$$dU = d(UV) = d(VU) \qquad \forall\ U,\ V. \tag{۹۱}$$

به دلیل خاصیت ویژه اندازه هار براحتی معلوم می شود که این کانال دارای خاصیت زیر است:

$$\mathcal{E}(V\rho V^\dagger) = \mathcal{E}(\rho) = V\mathcal{E}(\rho)V^\dagger. \tag{۹۲}$$

در تمرین ها از خواننده خواسته شده است که خواص بیشتر این کانال را بررسی کند.

[۱۲] Random Unitary Channels

[۱۳] Haar Measure

۷ نگاشت آفین

یکی دیگر از راه های مطالعه نگاشت های کاملا مثبت از طریق مطالعه نگاشت آفین [۱۴] وابسته به آنهاست. بسیاری از آنچه که در این بخش خواهیم گفت برای بعدهای دلخواه نیز درست است اما ما برای مشخص بودن و برای سادگی خود را محدود به کیوبیت ها می کنیم. بسیار آموزنده است اگر خواننده سعی کند نتایج این بخش را به بعد دلخواه تعمیم دهد و بیابد که کدام نتیجه ها مختص بعد دو هستند و کدام ها قابل تعمیم به ابعاد بالاتر هستند. اثر یک کانال کوانتومی روی یک ماتریس هرمیتی دلخواه را می توان از روی اثر آن روی ماتریس های هرمیتی پایه تعیین کرد. اگر این کانال رد نگهدار و مثبت باشد آنگاه این اثر حتما به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(I) &= I + t_i\sigma_i \\ \mathcal{E}(\sigma_i) &= A_{ji}\sigma_j, \end{aligned} \tag{۹۳}$$

که در آن t_i ها مولفه های یک بردار و A_{ij} ها درایه های یک ماتریس سه بعدی حقیقی هستند. در این صورت یک حالت کیوبیتی با بردار بلوخ $\mathbf{r}$ تبدیل به حالتی با بردار بلوخ $\mathbf{r}'$ می شود که در آن:

$$\mathbf{r} \longrightarrow \mathbf{r}' = A\mathbf{r} + \mathbf{t}. \tag{۹۴}$$

پارامترهای t_i و A_{ij} را می توان به شکل زیر بدست آورد. برای بدست آوردن این روابط کافی است از رابطه

$$Tr(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}$$

در مورد ماتریس های پاوولی استفاده کرد:

$$t_i = \frac{1}{2}Tr(\sigma_i\mathcal{E}(I)), \qquad A_{ij} = \frac{1}{2}Tr(\sigma_i\mathcal{E}(\sigma_j)). \tag{۹۵}$$

[۱۴] Affine Map

نگاشت آفین را که می توان به شکل زیر نیز بازنویسی کرد:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ t_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ t_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}. \tag{۹۶}$$

و یا به صورت فشرده تر و با در نظر گرفتن چهاربردار

$$r_\mu = (r_0, r_1, r_2, r_3)^T$$

که در آن r_0 برابر با یک است،

$$r_\mu \longrightarrow A_{\mu\nu} r_\nu. \tag{۹۷}$$

(دقت کنید که در این جا فقط از نمادگذاری نسبیتی استفاده می کنیم و هیچ مفهوم نسبیتی در اینجا در کار نیست.) در این صورت می توانیم روابط (۹۵) را به صورت زیر بنویسیم:

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2} Tr(\sigma_\mu \mathcal{E}(\sigma_\nu)), \tag{۹۸}$$

که در آن $\sigma_\mu = (I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. ماتریس حقیقی A را می توان تجریه مقدار منفرد کرد و از آنجا که ماتریس اولیه حقیقی است ماتریس های قطری کننده نیز متعامد خواهند بود. بنابراین داریم:

$$A = R\Lambda R', \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{۹۹}$$

بنابراین بردار بلوخ در سه مرحله به شکل زیر تغییر پیدا می کند:

$$\mathbf{r}' = A\mathbf{r} + \mathbf{t} = R\Lambda\tilde{R}\mathbf{r} + \mathbf{t} = R[\Lambda\tilde{R}\mathbf{r} + \tilde{\mathbf{t}}] \qquad \tilde{\mathbf{t}} := R^{-1}\mathbf{t} \tag{۱۰۰}$$

بنابراین بردار بلوخ نخست یک دوران پیدا می کند، سپس در جهات سه گانه x, y, z تغییر مقیاس پیدا می کند و انتقال می یابد و سرانجام نیز دوباره دوران پیدا می کند. تاثیر این سه عمل روی کره بلوخ در شکل (۷) نشان داده شده است. معنای این حرف این است که یک کانال کلی

کیوبیتی را می توانیم به سه کانال ساده تر تجزیه کنیم. از آنجا که دوران روی کره بلوخ با یک نگاشت یکانی است نتیجه می گیریم که هر کانال کیوبیتی را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathcal{E}(\rho) = U\mathcal{E}_c(V\rho V^\dagger)U^\dagger. \quad (۱۰۱)$$

که در آن

$$U\sigma_i U^\dagger = R_{ij}\sigma_j \qquad V\sigma_i V^\dagger = R'_{ij}\sigma_j \quad (۱۰۲)$$

و $\mathcal{E}_c$ نگاشتی است که آن را شکل کانونیک نگاشت اولیه می خوانیم. این نگاشت روی ماتریس های پایه به شکل زیر عمل می کند:

$$\mathcal{E}_c(I) = I + \tilde{t}\cdot\sigma \qquad \mathcal{E}_c(\sigma_i) = \lambda_i\sigma_i \quad (۱۰۳)$$

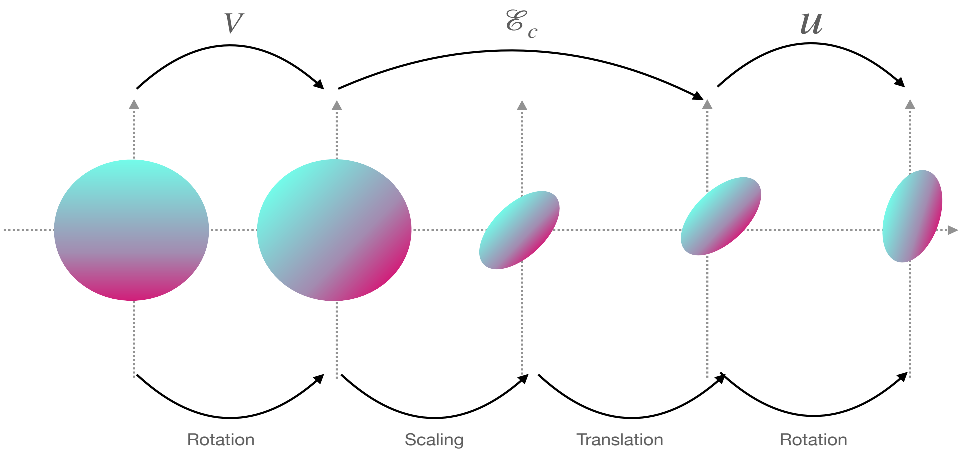
یا به شکل فشرده به صورت زیر:

$$\mathcal{E}_c : \begin{pmatrix} I \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \tilde{t}_1 & \tilde{t}_2 & \tilde{t}_3 \\ 0 & \lambda_1 & & \\ 0 & & \lambda_2 & \\ 0 & & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (۱۰۴)$$

تاثیر نگاشت کانونیک را روی بردار بلوخ می توان به صورت زیر نوشت.

$$\mathcal{E}_c : \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{t}_1 & \lambda_1 & & \\ \tilde{t}_2 & & \lambda_2 & \\ \tilde{t}_3 & & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad (۱۰۵)$$

■ تمرین: فرض کنید که کانال $\mathcal{E}_c$ یک کانال یونیتال است. شرایط روی پارامترهای $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ را چنان بدست آورید که نگاشت مزبور یک نگاشت کاملا مثبت باشد.



شکل ۲: کلی ترین عملی که یک نگاشت مثبت روی کره بلوخ انجام می دهد.

۸ ماتریس دینامیکی

فرض کنید که $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ دو نگاشت مثبت باشند. دراین صورت واضح است که ترکیب این دو نگاشت یعنی $\mathcal{E}\circ\mathcal{F}$ که به صورت زیر عمل می کند،

$$(\mathcal{E}\circ\mathcal{F})(\rho)=\mathcal{E}(\mathcal{F}(\rho)) \tag{۱۰۶}$$

نیز یک نگاشت مثبت است، زیرا همه خواص گفته شده برای یک نگاشت مثبت را در خود دارد. هم چنین واضح است که جمع محدب دو نگاشت مثبت بازهم مثبت است یعنی به ازای هر $0\leq\lambda\leq 1$ نگاشت زیر یک نگاشت مثبت است:

$$\mathcal{S}_\lambda(\rho)=\lambda\mathcal{E}(\rho)+(1-\lambda)\mathcal{F}(\rho). \tag{۱۰۷}$$

البته در حالت اخیر لازم است که دامنه و بردِ نگاشت های $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ یکی باشند.

■ تمرین: فرض کنید که نگاشت $\mathcal{E}$ دارای عناصر کراوس $\{A_\mu\}$ و نگاشت $\{\mathcal{F}\}$ دارای عناصر کراوس $\{B_\nu\}$ باشد. در این صورت عناصر کراوس نگاشت های فوق را پیدا کنید.

هرگاه بخواهیم ترکیب چندین نگاشت مثبت را پیدا کنیم، نمایش کراوس چندان کمک کننده نخواهد بود. به عنوان مثال فرض کنید که یک سانتی متر از یک فیبر نوری را آزمایش کرده ایم و متوجه شده ایم که اثر آن روی قطبش فوتون ها به صورت زیر قابل توصیف است:

$$\mathcal{E}(\rho) = p_0\rho + p_1\sigma_x\rho\sigma_x + p_2\sigma_y\rho\sigma_y, \qquad (۱۰۸)$$

حال می خواهیم اثر ده کیلومتر از این فیبر نوری را روی قطبش فوتون ها پیدا کنیم. در این صورت می بایست یک میلیون بار این کانال را با خودش ترکیب کنیم. طبیعی است که در نمایش کراووس چنین کاری بسیار پر زحمت است. در واقع تنها با دوبار ترکیب این کانال متوجه می شویم که عملگرهای کراووس کانال جدید دیگر σ_x و σ_y نیستند، بلکه عملگر σ_z نیز به آنها اضافه شده است. برای ترکیب کانال ها بهترین راه این است که هر کانال را به صورت یک عملگر خطی یا یک ماتریس که روی یک بردار اثر می کند نشان دهیم. یعنی آنها را به عنوان نگاشت های خطی معمولی درآوریم، یعنی نگاشت های خطی ای که به جای ماتریس ها روی بردارها اثر می کنند. برای این منظور ماتریس های $d\times d$ را به صورت بردارهای d^2 بعدی ستونی درمی آوریم. به این کار بردار سازی [۱۵] می گویند و به صورت زیر انجام می شود:

$$\hat{\rho} = \sum_{i,j}\rho_{i,j}|i\rangle\langle j| \longrightarrow |\rho\rangle = \sum_{i,j}\rho_{i,j}|i,j\rangle. \qquad (۱۰۹)$$

در این معادل سازی خواهیم داشت:

$$\hat{I} \longrightarrow |I\rangle = \sum_i |i,i\rangle = \sqrt{d}|\phi^+\rangle, \qquad (۱۱۰)$$

$$Tr(\hat{X}^\dagger\hat{Y}) \longrightarrow \langle X|Y\rangle. \qquad (۱۱۱)$$

به این ترتیب اثر یک کانال را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$|\mathcal{E}(\rho)\rangle = \Phi_{\mathcal{E}}|\rho\rangle \qquad \Phi_{\mathcal{E}} = \sum_m A_m\otimes A_m^*. \qquad (۱۱۲)$$

[۱۵] vectorization

ماتریس $\phi_{\mathcal{E}}$ ماتریس دینامیکی مربوط به کانال خوانده می شود. فایده این نحوه نوشتن کانال این است که رابطه زیر بدیهی خواهد بود:

$$\phi_{\mathcal{E}\circ\mathcal{F}} = \phi_{\mathcal{E}}\phi_{\mathcal{F}} \tag{۱۱۳}$$

■ **تمرین:** نشان دهید که ماتریس دینامیکی یک کانال با تغییر عملگرهای کراوس آن تغییر نمی کند.

■ **تمرین:** یک کانال پاوولی به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E}(\rho) = p_0\rho + p_1\sigma_x\rho\sigma_x + p_2\sigma_y\rho\sigma_y + p_z\sigma_z\rho\sigma_z. \tag{۱۱۴}$$

در آزمایشگاه فهمیده ایم که این کانال نشان دهنده اثر یک سانتی متر از یک فیبر نوری روی قطبش فوتون هاست. در این کانال پارامترهای خطا بسیار بسیار کوچک هستند. اثر ده کیلومتر از این فیبر نوری روی قطبش فوتون ها چگونه است.

---

۹ یکسانی چوی- یامیولکوسکی و اثبات قضیه کرواس

یکی از مهمترین قضایای مربوط به نگاشت های مثبت مربوط به یکسانی چوی ـ یامیولکوسکی [۱۶] است. به ازای هر نگاشت مثبتِ

$$\mathcal{E} : L(H_A) \longrightarrow L(H_A)$$

(نه الزاما کاملا مثبت) می توان یک ماتریس به شکل زیر تعریف کرد:

$$C_{\mathcal{E}} := (\mathcal{E}\otimes I)|\phi\rangle\langle\phi| \tag{۱۱۵}$$

که در آن $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}(\sum_i |i,\hat{i}\rangle)$ یک حالت است که در فضای $H_A\otimes H_B$ تعریف شده است. H_B یک فضای برداری با همان بعد H_A یعنی d است. بردارهای $\{|i\rangle \quad i=1\dots d\}$ و $\{|\hat{i}\rangle \quad \hat{i}=1\dots d\}$ پایه های متعامد و بهنجار برای فضاهای H_A و H_B هستند.

بنابراین داریم

$$C_{\mathcal{E}} = \frac{1}{d}\sum_i \mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)\otimes|\hat{i}\rangle\langle\hat{j}| \tag{۱۱۶}$$

[۱۶] Choi-Jamiolkowski

در نتیجه بدست می آوریم

$$\langle\hat{i}|C_{\mathcal{E}}|\hat{j}\rangle = \frac{1}{d}\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|). \qquad (۱۱۷)$$

با استفاده از این رابطه می توانیم اثر کانال $\mathcal{E}$ را روی یک حالت دلخواه حساب کنیم. نخست فرض کنید که این حالت یک حالت خالص است. در این صورت داریم

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \psi_i\psi_j^*\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) = d\psi_j^*\langle\hat{i}|C_{\mathcal{E}}|\hat{j}\rangle = d\langle\psi^*|C_{\mathcal{E}}|\psi^*\rangle \qquad (۱۱۸)$$

که در آن

$$|\psi^*\rangle = \sum_i \psi^*|\hat{i}\rangle, \quad , \quad \langle\psi^*| = \sum_i \psi_i\langle\hat{i}|. \qquad (۱۱۹)$$

بردارهایی در فضای دوم هستند.

■ تمرین: ماتریس چوی را برای کانال های بیت برگردان، و واقطبش بدست آورید و نشان دهید که این ماتریس ها مثبت هستند. هم چنین رد آنها را حساب کنید.

■ تمرین: ماتریس چوی را برای کانال های میراکننده دامنه و میراکننده فاز بدست آورید. نشان دهید که این ماتریس ها مثبت هستند . رد آنها را حساب کنید.

■ قضیه: خواص ماتریس چوی

با استفاده از رابطه (۱۱۶) می توان خواص زیر را برای ماتریس چوی ثابت کرد:

یک ـ نگاشت $\mathcal{E}$ یک نگاشت رد نگه دار است اگر و فقط اگر

$$Tr_A C_{\mathcal{E}} = \frac{I_B}{d}. \qquad (۱۲۰)$$

دو_ نگاشت $\mathcal{E}$ یک نگاشت یونیتال است، اگر و فقط اگر

$$Tr_B C_{\mathcal{E}} = \frac{I_A}{d}. \tag{۱۲۱}$$

سه ـ نگاشت $\mathcal{E}$ یک نگاشت کاملا مثبت است، اگر و فقط اگر ماتریس $C_{\mathcal{E}}$ یک ماتریس مثبت باشد.

سه ـ نگاشت $\mathcal{E}$ یک نگاشت است که در شرط $\mathcal{E}(X^\dagger) = \mathcal{E}(X)^\dagger$ صدق می کند، اگر و فقط اگر ماتریس $C_{\mathcal{E}}$ یک ماتریس هرمیتی باشد.

اثبات قسمت یک: در همه روابط زیر روی اندیس های تکراری جمع شده است.

$$Tr_A C_{\mathcal{E}} = \frac{1}{d}Tr(\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)) \otimes |i\rangle\langle j| = \frac{1}{d}Tr(|i\rangle\langle j|) \otimes |i\rangle\langle j| = \frac{1}{d}\sum_{i,j}\delta_{i,j}|i\rangle\langle j| = \frac{1}{d}I_B. \tag{۱۲۲}$$

اثبات قسمت دو:

$$Tr_B C_{\mathcal{E}} = \frac{1}{d}\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) \otimes Tr|i\rangle\langle j| = \frac{1}{d}\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)\delta_{i,j} = \frac{1}{d}\mathcal{E}(I_A) \tag{۱۲۳}$$

اثبات قسمت سه: اگر نگاشت کاملا مثبت باشد، بنابر تعریف $C_{\mathcal{E}}$ یک ماتریس مثبت است. اما اگر ماتریس چوی مثبت باشد، اثبات این که نگاشت کاملا مثبت است، کار سختی است. این همان قضیه ای است که چوی ثابت کرده و ما آن را در قسمت بعدی تحت عنوان قضیه کراوس ثابت می کنیم.

اثبات قسمت چهار: اگر نگاشت خاصیت هرمیتی بودن را حفظ کند، یعنی داشته باشیم

$$\mathcal{E}(X^\dagger) = (\mathcal{E}(X))^\dagger\,. \tag{۱۲۴}$$

آنگاه

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{E}}^\dagger &= \frac{1}{d}\Big[\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) \otimes |i\rangle\langle j|\Big]^\dagger = \frac{1}{d}\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|)^\dagger \otimes |i\rangle\langle j|^\dagger \\ &= \frac{1}{d}\mathcal{E}(|j\rangle\langle i|) \otimes |j\rangle\langle i| = C_{\mathcal{E}} \end{aligned} \tag{۱۲۵}$$

اگر خواننده به اثبات ها دقت کند متوجه می شود که همه این اثبات ها به صورت تساوی های متوالی نوشته شده اند و بنابراین هر دو طرف قضیه ها را ثابت می کنند.

■ تمرین : نشان دهید که هرگاه ماتریس $C_{\mathcal{E}}$ هرمیتی باشد، آنگاه نگاشت $\mathcal{E}$ دارای خاصیت زیر است:

اکنون برای بیان و اثبات قضیه کراوس آماده‌ایم. به شکلی که این قضیه را بیان می کنیم، نتایج بیشتری از قضیه اولیه کراوس در بردارد و در واقع قضیه چوی را نیز که اثبات آن را قبلا نیاوردیم کامل می کند.

قضیه کراوس: [۱۷] سه گزاره زیر معادل اند:

a: $\mathcal{E}$ یک نگاشت کاملا مثبت است.

b: ماتریس چوی وابسته به این نگاشت مثبت است یعنی: $C_{\mathcal{E}} \geq 0$.

c: نگاشت $\mathcal{E}$ نمایش زیر را دارد:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \rho A_{\alpha}^{\dagger}. \tag{۱۲۶}$$

برای اثبات نشان می دهیم که زنجیره استنتاج های زیر درست است:

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow a. \tag{۱۲۷}$$

اثبات $a \longrightarrow b$**:**

از انجا که نگاشت کاملا مثبت است، پس توسعه آنهم به صورت $I \otimes \mathcal{E}$ یک نگاشت مثبت است و در نتیجه اثر این نگاشت روی ماتریس مثبت $|\psi\rangle\langle\psi|$ یک ماتریس مثبت است. بنابراین ماتریس چوی مثبت است.

اثبات $b \longrightarrow c$**:**

برای این کار به رابطه (۱۱۸) توجه می کنیم. دیدیم که اثر چنین نگاشتی روی هر حالت خالصی به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) = d\langle\psi^*|C_{\mathcal{E}}|\psi^*\rangle. \tag{۱۲۸}$$

حال دقت می کنیم که $C_{\mathcal{E}}$ از آنجا که درست مثل یک ماتریس چگالی است دارای یک تجزیه است: (البته توجه داریم که این تجزیه یکتانیست.)

$$C_{\mathcal{E}} = \sum_{m} |s_m\rangle\langle s_m| \tag{۱۲۹}$$

[۱۷] این قضیه نخستین بار توسط کارل کراوس Karl Kraus فیزیکدان آلمانی ثابت شده است.

بنابراین خواهیم داشت

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \langle\psi^*|C_{\mathcal{E}}|\psi^*\rangle = \sum_m \langle\psi^*|s_m\rangle\langle s_m|\psi^*\rangle \tag{۱۳۰}$$

حال عملگرهای A_m را به شکل زیر تعریف می کنیم. دقت کنید که این عملگرها خطی اند.

$$A_m|\psi\rangle := \langle\psi^*|s_m\rangle, \tag{۱۳۱}$$

با توجه به این رابطه بدست می آوریم

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_m A_m|\psi\rangle\langle\psi|A_m^\dagger. \tag{۱۳۲}$$

با توجه به این که هر ماتریس چگالی را می توان به شکل مخلوطی از حالت های خالص تجزیه کرد، خواهیم داشت:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_m A_m\rho A_m^\dagger. \tag{۱۳۳}$$

واین رابطه قضیه را ثابت می کند.

اثباتِ $a \longrightarrow c$:

یک بردار دلخواه $|v\rangle \in V_A \otimes V_B$ در نظر می گیریم و عنصر ماتریسی زیر را حساب می کنیم، بدست می آوریم

$$\langle v|(\mathcal{E}\otimes I)(\rho)|v\rangle = \sum_m \langle v|(A_m\otimes I)\rho(A_m^\dagger\otimes I)|v\rangle = \sum_m \langle\psi_m|\rho|\psi_m\rangle \geq 0. \tag{۱۳۴}$$

که درآن بردارهای $|\psi_m\rangle$ را به صورت زیر تعریف کرده $|\psi_i\rangle = (A_m^\dagger \otimes I)|v\rangle$ و از مثبت بودن ماتریس چگالی ρ استفاده کرده ایم. این رابطه نشان می دهد که نگاشت $\mathcal{E}\otimes I$ مثبت است. یعنی نگاشت $\mathcal{E}$ کاملا مثبت است.

■ **تمرین:** نشان دهید که رابطه ماتریس دینامیکی یک کانال و ماتریس چوی آن به صورت زیر است:

$$C_{\mathcal{E}} = \Phi_{\mathcal{E}}^R, \tag{۱۳۵}$$

که در آن

$$(A^R)_{ij,kl} = A_{ik,jl}. \tag{۱۳۶}$$

۱.۹ آزادی در انتخاب عملگرهای کراوس

آیا عملگرهای کراوسی که یک ابرعملگرکوانتومی را ایجاد می کنند یکتا هستند؟ پاسخ این سوال منفی است. برای درک پاسخ این سوال می توان به منشاء تعریف عملگرهای کراوس در یکی از نمونه های کانال ها که نشان دهنده دینامیک یک سیستم باز است توجه کرد. دیدیم که این عملگرها به شکل زیر تعریف می شوند:

$$E_i := \langle i|U|0\rangle \tag{۱۳۷}$$

که درآن $\{|i\rangle\}$ ها تشکیل یک پایه برای فضای هیلبرت محیط را می دهند که برای محاسبهی ردّ روی این فضا بکار رفته اند و $\langle 0|$ حالت اولیه محیط است. از آنجا که پایه های مختلفی می توانستیم برای محاسبه رد انتخاب کنیم معلوم می شود که عملگرهای کراوس نیز یکتا نیستند. اگر یک پایه متعامد دیگر انتخاب مثل $\{|i'\rangle\}$ برای فضای هیلبرت محیط انتخاب کنیم عملگرهای کراوس عبارت خواهند شد:

$$F_i = \langle i'|U|0\rangle \tag{۱۳۸}$$

اما از آنجا که هردو پایه متعامد هستند خواهیم داشت

$$|i'\rangle = \sum_j S^*_{i,j}|j\rangle, \longrightarrow \langle i'| = \sum_j S_{i,j}\langle j| \tag{۱۳۹}$$

و درنتیجه

$$F_i = \sum_j S_{i,j}E_j. \tag{۱۴۰}$$

بنابراین با انتخاب پایه های متفاوت می توانیم به مجموعه های متفاوتی از عملگرهای کراوس برای بیان یک ابرعملگر کوانتومی برسیم. این مجموعه عملگرهای کراوس به صورت بالا به هم مرتبط هستند که درآن S یک عملگر یکانی است. دراین جا فرض کرده ایم که تعداد هردو مجموعه عملگرهای کراوس یکسان است که این امر را همواره می توان با اضافه کردن عملگرهای صفر به مجموعهای که تعداد عناصرش کمتراست به انجام رساند. در بررسی ای که تا کنون انجام دادیم از یک مدل خاص برای کانال کوانتومی استفاده کردیم که مبتنی بر دینامیک سیستم های باز بود. در ادامه این بررسی را به صورت کلی و مجردی که از اثبات قضیه کراوس یادگرفته ایم انجام می دهیم. سوال پیش روی ما این است که آیا همه عملگرهای کراوس که یک ابر عملگرِ کوانتومی را بیان می کنند به شکل بالا به هم مرتبط هستند یا نه؟ پاسخ این سوال در قضیه زیر داده شده است.

قضیه: هردو مجموعه عملگرهای کراوس که یک ابرعملگرکوانتومی $\mathcal{E}$ را بیان کنند، با یک ماتریس یکانی مطابقِ رابطه‌ی 140 با یکدیگر مرتبط هستند.

اثبات : اگر $F_i = \sum_j S_{ij} E_j$ باجایگذاری مستقیم در رابطه های $\mathcal{E}(\rho) := \sum_i E_i \rho E_i^\dagger$ و $\mathcal{F}(\rho) := \sum_i F_i \rho F_i^\dagger$ بدست می آوریم

$$\mathcal{F}(\rho) = \mathcal{E}(\rho). \tag{۱۴۱}$$

بالعکس، اگر به ازای هر ρ داشته باشیم $\mathcal{E}(\rho) = \mathcal{F}(\rho)$، با استفاده از این تساوی و هم چنین رابطه (۱۲۸) برای یک حالت خالصِ $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ نتیجه می گیریم که

$$\langle \psi^* | C_{\mathcal{E}} | \psi^* \rangle = \langle \psi^* | C_{\mathcal{F}} | \psi^* \rangle \tag{۱۴۲}$$

درنتیجه بدست می آوریم که $C_{\mathcal{E}} = C_{\mathcal{F}}$. بنابراین تجزیه های $C_{\mathcal{E}}$ و $C_{\mathcal{F}}$ را در نظر می گیریم.

$$C_{\mathcal{E}} = \sum_i |s_i\rangle\langle s_i| \qquad C_{\mathcal{F}} = \sum_i |t_i\rangle\langle t_i| \tag{۱۴۳}$$

اما از درس های قبلی در مورد تجزیه ماتریس های چگالی می دانیم که هر دو تجزیه ای از یک ماتریس چگالی به شکل زیر به هم مربوط اند

$$|t_i\rangle = \sum_j S_{ij} |s_j\rangle. \tag{۱۴۴}$$

و در نتیجه

$$F_i|\psi\rangle = \langle \psi^* | t_i \rangle = \sum_j S_{ij} \langle \psi^* | s_j \rangle = S_{ij} E_j |\psi\rangle. \tag{۱۴۵}$$

از آنجا که این تساوی برای هر حالتِ دلخواهِ $|\psi\rangle$ برقراراست نتیجه می گیریم که

$$F_i = \sum_j U_{ij} E_j, \tag{۱۴۶}$$

که همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

۲.۹ تعداد عملگرهای کراوس

از آنچه که تاکنون گفته‌ایم به نظر می رسد که تعداد عملگرهای کراوس به اندازه بعد محیط است. اما با توجه به آزادی ای که درانتخاب عملگرهای کراوس وجود دارد می توان همواره کاری کرد که یک ابرعملگر کوانتومی را با تعداد خیلی کمتری از عملگرهای کراوس بیان کرد. درواقع قضیه زیر نشان می دهد که تعداد عملگرهای کراوس می تواند بسیار کمتر از بعد محیط باشد. یادآوری می کنیم که یک سیستم مثل یک کیوبیت می تواند دو بعدی بوده و درحمامی از فوتون ها که یک فضای هیلبرت بی نهایت بعدی دارد قرار گرفته باشد. قضیه زیر بیان می کند که برای توصیف کلی ترین ابرعملگرکوانتومی برای یک کانال کیوبیتی حداکثر به چهار عملگر کراوس نیاز داریم.

قضیه: هر ابر عملگر کوانتومی روی یک سیستم d بعدی را می توان با تعداد کمتر یا مساوی d^2 عملگرِ کراوس بیان کرد.

اثبات: اثبات این قضیه بسیار ساده است. کافی است توجه کنیم که ماتریس چگالیِ $C_{\mathcal{E}}$ را که ابرعملگرِ $\mathcal{E}$ را توصیف می کند، همواره می توان در پایه به صورت زیر تجزیه طیفی کرد و تجزیه طیفی چنین عملگری بیشتر از d^2 ویژه مقدار غیر صفر ندارد.

$$C_{\mathcal{E}} = \sum_{i=1}^{d^2} |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i| \tag{۱۴۷}$$

حال اگر به رابطه 131 و نحوه تعریف عملگرهای کراوس دقت کنیم اثبات قضیه کامل می شود.

۱۰ نگاشت دوگان

برای سادگی فرض می کنیم کانال کوانتومی از حالت های یک فضا به حالت های همان فضا تعریف شده است. با کمی زحمت بیشتر می توان آنچه را که در پی می آید به حالت کلی تر نیز تعمیم داد. یک کانال کوانتومی $\mathcal{E} : L(H) \longrightarrow L(H)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E}(X) := \sum_m A_m X A_m^\dagger, \qquad \sum_m A_m^\dagger A_m = I. \tag{۱۴۸}$$

نگاشت دوگان یا $\mathcal{E}^*$ نگاشتی است که دارای خاصیت زیر است:

$$\langle \mathcal{E}(X), Y\rangle = \langle X, \mathcal{E}^*(Y)\rangle \tag{۱۴۹}$$

که در آن $\langle X,Y\rangle := Tr(X^\dagger Y)$ ضرب داخلی دو عملگر متعلق به $L(H)$ است. با بسط کانال $\mathcal{E}$ بر حسب عملگرهای کراوس معلوم می شود که عملگر دوگان آن به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathcal{E}^*(Y) = \sum_m A_m^\dagger Y A_m \qquad (۱۵۰)$$

در نتیجه نگاشت دوگان یک نگاشت یونیتال خواهد بود.

$$\mathcal{E}^*(I) = I \qquad (۱۵۱)$$

هم چنین داریم:

$$\phi_{\mathcal{E}^*} = (\phi_{\mathcal{E}})^\dagger \qquad (۱۵۲)$$

و با کمی محاسبه

$$C_{\mathcal{E}^*} = PC_{\mathcal{E}}^* P, \qquad (۱۵۳)$$

که در آن P عملگر جایگشت است. به این ترتیب معلوم می شود که اگر $\mathcal{E}$ یک نگاشت کاملا مثبت باشد، $\mathcal{E}^*$ نیز یک نگاشت کاملا مثبت است اگر چه ممکن است رد نگه دار نباشد.

۱۱ معادله لیندبلد

تا کنون به کانال های کوانتومی تنها با توجه به رابطه حالت های ورودی و خروجی آنها نگاه کرده ایم. این که حالت خروجی در چه زمانی تولید می شود، یا به عبارت دقیق تر دینامیک این نگاشت در طول زمان، مورد توجه و علاقه ما نبوده است. به شکل دقیق تر باید بنویسیم:

$$\rho(t) = \mathcal{E}_t(\rho(0)). \qquad (۱۵۴)$$

به یک معنا می توان این معادله را جایگزین رابطه $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$ برای حالت های باز در نظر گرفت به این معنا که تحول یک حالت را در یک زمان متناهی که لزوما بی نهایت کوچک نیست، تعیین می کند. برای سیستم های بسته تحول در زمان های بی نهایت کوچک از همین

رابطه ی $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$ و با در نظر گرفتن یک زمان بی نهایت کوچک $\delta t \longrightarrow t$ بدست می آید. برای سیستم های باز هم می توانیم این کار را انجام دهیم و معادله تحول سیستم های باز را در زمان کوچک بدست بیاوریم. آنچه که بدست می آوریم معادله لیندبلد [۱۸] نامیده می شود. این معادله به یک معنا جایگزین

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle \tag{۱۵۵}$$

می شود. البته باید توجه کنیم که معادله لیندبلد با تقریب هایی بدست می آید و در حالت کلی معادله دینامیکی یک سیستم باز با معادله لیندبلد توصیف نمی شود. به این تقریب ها در استخراج معادله لیندبلد اشاره می کنیم. برای شروع معادله تحول کوانتومی را برای یک بازه بی نهایت کوچک به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$\rho(t+\epsilon) = \sum_{\mu=0}^{n} A_\mu(t,\epsilon)\rho(t)A_\mu^\dagger(t,\epsilon). \tag{۱۵۶}$$

حال می خواهیم بستگی عملگرهای کراووس را به ϵ تعیین کنیم. برای این کار توجه می کنیم که اگر ϵ به سمت صفر میل کند، می بایست $\rho(t+\epsilon)$ با $\rho(t)$ برابر شود. بنابراین می توانیم یکی از عملگرهای کراوس را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$A_0(t,\epsilon) = I - i\epsilon L_A(t) \tag{۱۵۷}$$

- ممکن است سوال شود که چرا فقط یکی از عملگرهای کراوس به سمت یک میل کند؟ آیا ممکن است دو عملگر کراوس به شکل زیر باشند:

$$A_0(t,\epsilon) = \alpha I - i\epsilon L_A(t), \qquad A_1(t,\epsilon) = \beta I - i\epsilon K_A(t) \tag{۱۵۸}$$

به شکلی که بازهم در حد $\epsilon \longrightarrow 0$ شرط

$$\rho(t,\epsilon) \longrightarrow \rho(t) \tag{۱۵۹}$$

برقرار باشد؟ برای پاسخ به این سوال توجه می کنیم که لازمه شرط (۱۵۹) آن است که داشته باشیم:

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow} A_0\rho A_0^\dagger + A_1\rho A_1^\dagger \approx (|\alpha|^2 + |\beta|^2)\rho) \tag{۱۶۰}$$

[۱۸] Lindblad Equation

که معنایش این است که $|\alpha|^2+|\beta^2|=1$. در چنین حالتی می توانیم با باز تعریف دو عملگر کراوس جدید به صورت زیر

$$B_0 \longrightarrow \alpha^* A_0+\beta^* A_1 \approx I-i\epsilon L_B(t), \qquad B_1 \longrightarrow -\beta\alpha A_0+\alpha A_1 \approx O(\epsilon) \tag{۱۶۱}$$

به همان رابطه قبلی برسیم.

عملگر L_A الزاماً هرمیتی نیست. بنابراین می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$L_A = H_0 + iL_0 \tag{۱۶۲}$$

که در آن H_0 و L_0 هرمیتی اند. حال از شرط بهنجارش

$$A_0^\dagger A_0 + \sum_\mu A_\mu^\dagger A_\mu = I$$

استفاده می کنیم و با جایگذاری A_0 در آن بدست می آوریم:

$$2\epsilon L_0 + \sum_{\mu\neq 0} A_\mu^\dagger A_\mu = 0. \tag{۱۶۳}$$

این رابطه نشان می دهد که عملگرهای A_μ متناسب با $\sqrt{\epsilon}$ هستند و بنابراین می نویسیم:

$$A_\mu = \sqrt{\epsilon} L_\mu. \tag{۱۶۴}$$

حال می توانیم همه این عملگرها را در رابطه اصلی کراوس جایگذاری کنیم و بدست بیاوریم:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_0,\rho] + \sum_\mu L_\mu\rho L_\mu^\dagger - \frac{1}{2}L_\mu^\dagger L_\mu\rho - \frac{1}{2}\rho L_\mu^\dagger L_\mu. \tag{۱۶۵}$$

این معادله، معادله لیندبلد خوانده می شود. معنای این معادله چیست؟ جمله اول این معادله همان تحول یکانی سیستم کوانتومی را نشان می دهد. اما جملات بعدی نشان می دهند که حالت سیستم در اثر اختلالات محیط دچار نوعی پرش بین حالت های مختلف می شود. توجه به یک مثال این موضوع را روشن می کند: یک اتم دو ترازه را که ترازهای انرژی آن را با $|g\rangle$ و $|e\rangle$ نشان می دهیم در نظر بگیرید. هامیلتونی این سیستم را می توان در همین پایه انرژی به صورت زیر نوشت: $H=\sigma_z=|g\rangle\langle g|-|e\rangle\langle e|$. در عین حال برهم کنش با محیط باعث می شود که گذارهایی بین حالت پایه و حالت برانگیخته بوجود آید. عملگرهای لیندبلد متناظر با این پرش ها یا گذار ها عبارت اند از:

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g|, \qquad \sigma_- = |g\rangle\langle e|. \tag{۱۶۶}$$

■ تمرین: نشان دهید که معادله لیندبلد برای این اتم دو ترازه پس از ساده کردن به شکل زیر در می آید.

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[\sigma_z, \rho] + \sigma_+\rho\sigma_- + \sigma_-\rho\sigma_- - \rho. \quad (۱۶۷)$$

دقت کنید که در استخراج معادله لیندبلد تقریب های مهمی را در نظر گرفته ایم. مهمترین این تقریب ها این است که فرض کرده ایم در لحظه $t+\epsilon$ حالت سیستم یعنی $\rho(t+\epsilon)$ از روی حالت سیستم در لحظه t قابل تعیین کردن است. اگر دقت کرده باشید در استخراج معادله تحول برای سیستم های باز فرض کردیم که در لحظه اولیه حالت سیستم و حالت محیط از یکدیگر جدا هستند و حالت کل سیستم به صورت $\rho_S(0)\otimes\rho_E(0)$ قابل نوشتن است. با درست بودن این شرط بود که به تجزیه کراوس از یک تحول کوانتومی سیستم باز رسیدیم. در استخراج معادله لیندبلد فرض کردیم که این شرط در هر لحظه برقرار است. این فرض به این معناست که همبستگی های ایجاد شده بین سیستم و محیط خیلی سریع از بین می روند و محیط به دلیل بزرگی فوق العاده اش هیچگاه با سیستم درهم تنیده نمی شود. با چنین فرضی به این نتیجه می رسیم که حالت سیستم در هر لحظه به حالت همان سیستم در لحظه قبل بستگی دارد و به همبستگی های سیستم و محیط وابسته نیست. به عبارت دیگر به این نتیجه می رسیم که تحول این سیستم حافظه مند نیست. چنین تحولاتی را تحول مارکوفی [۱۹] می نامند. موضوع تحول غیرمارکوفی یک موضوع پژوهش روز است که خواننده علاقمند می تواند برای فهم آن به مقالات روز مراجعه کند. در این درس خود را به دینامیک مارکوفی و معادله لیندبلد محدود می کنیم و سعی می کنیم که روش حل کردن این معادله را با مطالعه چند مثال ساده یاد بگیریم.

■ **مثال:** یک معادله لیندبلد ساده به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}(\rho) = \frac{\gamma}{2}(\sigma_z\rho\sigma_z - \rho) \ \ , \ \ \gamma > 0. \quad (۱۶۸)$$

با بسط

$$\rho_t = \frac{1}{2}(I + x_t\sigma_x + y_t\sigma_y + z_t\sigma_z)$$

و قرار دادن این بسط در دو طرف معادله بالا و سپس حل معادلات ساده ای که حاصل می شود بدست می آوریم:

$$\rho_t = \frac{1}{2}\left[I + x_0e^{-\gamma t}\sigma_x + y_0e^{-\gamma t}\sigma_y + z_0\sigma_z\right] \quad (۱۶۹)$$

که در آن (x_0, y_0, z_0) مولفه های بردار بلوخ در لحظه صفر هستند. تحقیق کنید که این رابطه را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$\rho_t = \frac{1}{2}(1+e^{-\gamma t})\rho_0 + \frac{1}{2}(1-e^{-\gamma t})\sigma_z\rho_0\sigma_z. \quad (۱۷۰)$$

[۱۹] Markovian Dynamics

که در آن ρ_0 حالت اولیه است.

۱۲ مسئله ها:

- در بعد دلخواه d کانال واقطبش به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{E}(\rho) = p\rho + (1-p)\frac{I}{d} \tag{۱۷۱}$$

الف: فرض کنید که یک خالص $|\psi\rangle$ را به این کانال وارد می کنیم. ویژه حالت های ماتریس چگالی خروجی را پیدا کنید.

ب: ماتریس های تعمیم یافته پاوولی را به شکل زیر تعریف کنید

$$X = \sum_{j=1}^{d} |j+1\rangle\langle j|, \qquad Z = \sum_{j=1} \omega^j |j\rangle\langle j|, \tag{۱۷۲}$$

که درآن همه جمع ها به سنج d انجام می شود $(d+k \equiv k)$ و $\omega^d = 1$. این ماتریس ها تعمیم σ_x و σ_z هستند. نشان دهید که

$$ZX = \omega XZ, \tag{۱۷۳}$$

نشان دهید که ماتریس های $X^m Z^n$ برای $m, n = 0, \cdots d-1$ یک پایه برای ماتریس های d بعدی تشکیل می دهند.

ج: با استفاده از این ماتریس ها یک نمایش کراوس برای کانال واقطبش بدست آورید.

- H یک فضای برداری n بعدی و $\mathcal{D}(H)$ فضای برداری ماتریس های چگالی روی آن است. چه تعداد پارامتر حقیقی لازم است که یک ابرعملگر $\mathcal{E}: \rho \longrightarrow \mathcal{E}(\rho)$ را که در فضای $\mathcal{D}(H)$ اثر می کند، به طور کامل تعیین کند؟ (راهنمایی: برای پاسخ می بایست تعیین کنید

که چه تعداد پارامتر لازم است که یک ماتریس هرمیتی را مشخص کند و سپس چه تعداد پارامتر لازم است که یک نگاشت خطی ردّ نگهدار را بین این ماتریس ها تعیین کند.)

■ هرگاه حالت اولیه سیستم و محیط به صورت $|\phi\rangle\otimes|e\rangle$ باشد که در آن $|e\rangle$ یک حالت مشخص از محیط باشد، و عملگر یکانی U روی سیستم و محیط اثر کند، می توان عملگرهای کراوس را برای ابر عملگری که تحول سیستم را مشخص می کند، بدست آورد. این کار را در کلاس انجام دادیم.

الف: فرض کنید که حالت اولیه سیستم به صورتِ $\rho_s\otimes|e\rangle\langle e|$ است. نشان دهید که عملگرهای کراوس بازهم به همان صورت قبلی باقی خواهند ماند.

ب: فرض کنید که حالت اولیه سیستم به صورتِ $\rho_s\otimes\rho_e$ است. عملگرهای کراوس را با استفاده از تجزیه طیفی ρ_e بدست آورید.

■ عملگر زیر روی دو کیوبیت اثر می کند. کیوبیت اول به منزله سیستم و کیوبیت دوم به منزله محیط است:

$$U=|0\rangle\langle 0|\otimes I+|1\rangle\langle 1|\otimes X, \tag{۱۷۴}$$

الف: هرگاه که حالت اولیه‌ی محیط $|0\rangle$ باشد، عملگرهای کراوس را برای تحول سیستم پیدا کنید.

ب: هرگاه که حالت اولیه محیط یک حالت گرمایی باشد یعنی حالتِ $\rho_e=\frac{1}{Z}(e^{-\beta E_0}|0\rangle\langle 0|+e^{-\beta E_1}|1\rangle\langle 1|)$ که درآن $Z=e^{-\beta E_0}+e^{-\beta E_1}$، عملگرهای کراوس را پیدا کنید.

■ عملگر زیر روی دو کیودیت [۲۰] اثر می کند. کیودیت تعمیمی از کیوبیت است که فضای برداری مربوطه‌اش به جای دو بعد، d بعد دارد.

[۲۰] Qudit

کیودیت اول به منزله سیستم و کیو دیت دوم به منزله محیط است:

$$U=\sum_{k=0}^{d-1}|k\rangle\langle k|\otimes X^k, \tag{۱۷۵}$$

که X همان عملگری است که درتمرین ۲ تعریف شد.

الف: هرگاه که حالت اولیه‌ی محیط $\langle 0|$ باشد، عملگرهای کراوس را برای تحول سیستم پیدا کنید.

ب: هرگاه عملگر یکانی به صورت زیر باشد، عملگرهای کراوس را بدست آورید:

$$U=\sum_{k,l=0}^{d-1}|k\rangle\langle k|\otimes Z^k, \tag{۱۷۶}$$

Z نیز در تمرین ۲ تعریف شده است.

- یک کانال واقطبش برای کیوبیت ها در نظر بگیرید:

$$\rho'=\mathcal{E}(\rho)=(1-p)\rho+p\frac{I}{2}$$

نشان دهید که

$$tr(\rho'^2)\leq tr(\rho^2).$$

این نامسای به شکل زیر نیز تعمیم می یابد:

$$tr(\rho'^k)\leq tr(\rho^k) \qquad \forall\ k\geq 1.$$

ولی من هنوز اثبات ساده ای برای آن پیدا نکرده ام. دانشجویی که بتواند این نامساوی تعمیم یافته را ثابت کند یک امتیاز مثبت خواهد گرفت.

■ یک کانال در دست داریم که ماتریس های چگالی $\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$ را به ماتریس های زیر تبدیل می کند:

$$\mathcal{E}(\rho) = \begin{pmatrix} 1-(1-\gamma)(1-a) & b\sqrt{1-\gamma} \\ b^*\sqrt{1-\gamma} & c(1-\gamma) \end{pmatrix}. \qquad (۱۷۷)$$

عملگرهای کراوس را برای این کانال بدست آورید. (راهنمایی: در بسیاری از موارد می توان با سعی و خطا عملگرهای کراوس را بدست آورد.)

■ یک کانال به شکل زیر تعریف شده است:

$$\rho \longrightarrow \mathcal{E}(\rho) = A_0\rho A_0^\dagger + A_1\rho A_1^\dagger, \qquad (۱۷۸)$$

که درآن

$$A_0 = \sqrt{p}X, \qquad A_1 = \sqrt{1-p}Y, \qquad (۱۷۹)$$

و X و Y هم ماتریس های پاوولی هستند. فرض کنید که این سیستم در تماس با محیطی بوده است که تنها از یک کیوبیت تشکیل شده است. یک عملگریکانی مثل U بدست آورید که این ابرعملگر ناشی از تحول سیستم و محیط تحت آن عملگرباشد. (راهنمایی: دقت کنید که تنها شرط روی U می بایست این باشد که $A_m = \langle m|U|e\rangle$).

■ یک کانال با عملگرهای کراوس زیر داده شده است:

$$M_0 = \sqrt{1-p}I, \qquad M_1 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (۱۸۰)$$

الف: نشان دهید که این کانال را با دو عملگر کراوس N_1 و N_2 نیز می توان نمایش داد.

ب: با اضافه کردن یک عملگر $N_0 = 0$، نشان دهید که M_i ها با N_μ ها توسط یک ماتریس یکانیِ U مرتبط هستند، یعنی

$$M_i = \sum_\mu U_{i\mu} N_\mu.$$

- فرض کنید که یک کانال بیت ـ برگردان با پارامترِ p، n بار روی یک کیوبیت اثر کند. نشان دهید که کانال حاصل بازهم یک کانال بیت برگردان است. پارامتر این کانال را برحسب p و n بدست آورید.

- مثالی از یک کانال ارائه دهید که اگر دو بار روی یک کیوبیت اثر کند، کانال حاصل تبدیل به یک کانال از نوع متفاوت می شود.

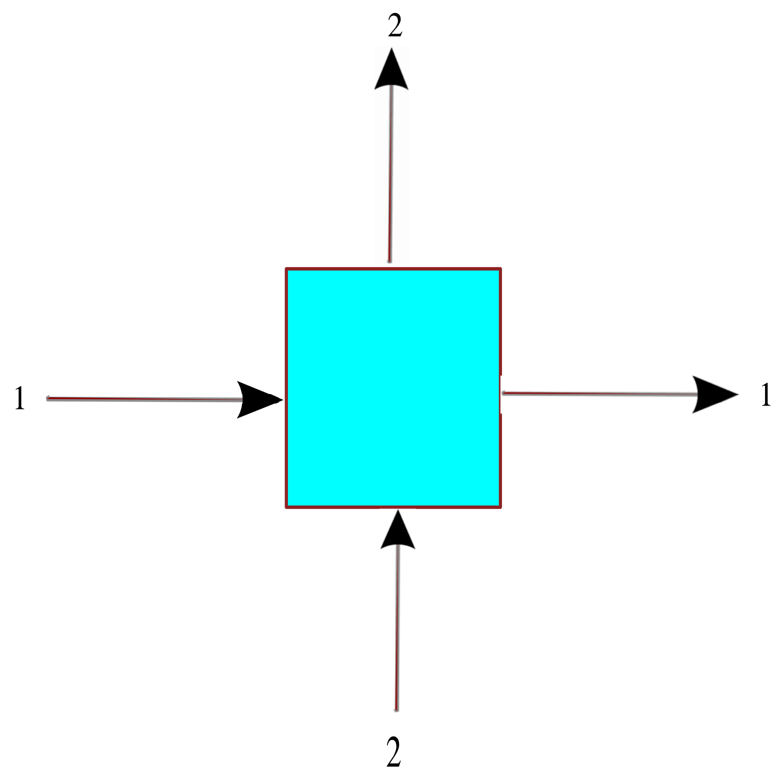
- یک Beam Splitter یک وسیله اپتیکی است که دو درگاه ورودی و دو درگاه خروجی دارد و به صورت نشان داده شده در شکل (۱۲) نشان داده می شود. در واقع این دستگاه روی دو مود فوتونی اثر می کند و آنها را مطابق با هامیلتونی بالا به دو مود فوتونی دیگر تبدیل می کند که در خروجی ظاهر می شوند.

$$\begin{aligned} |1,0\rangle &\longrightarrow \cos\theta|1,0\rangle + \sin\theta|0,1\rangle, \\ |0,1\rangle &\longrightarrow -\sin\theta|1,0\rangle + \cos\theta|0,1\rangle. \end{aligned} \tag{۱۸۱}$$

در عبارت بالا معنای $|1,0\rangle$ در طرف چپ این است که یک فوتون وارد درگاه ورودی شماره یک شده است و معنای همین کت در طرف راست این است که یک فوتون از درگاه شماره یک خارج شده است. همین تعبیر برای کت های $|0,1\rangle$ در طرف چپ و راست نیز درست است. از روی روابط بالا می توان گفت که این وسیله عملگرهای خلق فوتون ها را به شکل زیر تبدیل می کند:

$$\begin{aligned} a^\dagger &\longrightarrow \cos\theta a^\dagger + \sin\theta b^\dagger \\ b^\dagger &\longrightarrow -\sin\theta a^\dagger + \cos\theta b^\dagger, \end{aligned} \tag{۱۸۲}$$

که در آن $a^\dagger$ نشان دهنده عملگرهای خلق در درگاه های شماره یک و $b^\dagger$ نشان دهنده عملگرهای خلق در درگاه های شماره دو هستند.



شکل ۳: شمای یک Beam Splitter.

یک ـ با استفاده از این روابط پیدا کنید که حالت های زیر تحت عمل Beam Splitter به چه حالت هایی تبدیل می شوند:

$$|2,0\rangle, \quad |3,0\rangle, \quad |1,1\rangle, \quad |2,2\rangle, \quad |m,n\rangle. \tag{۱۸۳}$$

دو ـ با استفاده از این روابط پیدا کنید که حالت زیر به چه حالتی تبدیل می شوند:

$$|\alpha,\beta\rangle \tag{۱۸۴}$$

که در آن $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ نشان دهنده دو حالت همدوس هستند.

سه ـ آیا این وسیله می تواند روی دو حالت همدوس ورودی در هم تنیدگی ایجاد کند؟

■ می خواهیم فوتون هایی را از یک فیبر نوری عبور دهیم. می دانیم که در ابتدا محیط دارای هیچ فوتونی نیست. هم چنین می دانیم که هامیلتونی حاکم بر فوتون های داخل فیبر نوری و محیط به صورت زیر است:

$$H = \theta(ab^\dagger + a^\dagger b) \tag{۱۸۵}$$

که در آن $(a,\ a^\dagger)$ و $(b,\ b^\dagger)$ عملگرهای فوتونی مربوط به فیبر و محیط هستند.

یک ـ هرگاه حالت ورودی فیبر به صورت

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle \tag{۱۸۶}$$

باشد، حالت خروجی فیبر را حساب کنید. عمل این فیبر را به صورت یک کانال کوانتومی نشان داده و عملگرهای کراوس آن را بنویسید.

دو ـ هرگاه حالت ورودی فیبر به صورت

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n |n\rangle \tag{۱۸۷}$$

باشد، حالت خروجی فیبر را حساب کنید. بازهم عمل فیبر را به صورت یک کانال نشان داده و عملگرهای کراوس آن را بدست آورید.

■ تمرین: دو کانال میراکننده دامنه با پارامترهای γ و γ' را در نظر بگیرید. ترکیب این دو کانال پشت سرهم چه نوع کانالی است؟

■ نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E} : L(H_A) \longrightarrow L(H_A) \otimes L(H_B), \qquad \mathcal{E}(\rho) = \rho \otimes \xi \tag{۱۸۸}$$

که در آن ξ یک حالت معین در فضای هیلبرت H_B است. آیا این نگاشت یک نگاشت کاملا مثبت و رد نگهداراست؟ آگر چنین است عملگرهای کراوس مربوط به آن کدام است؟

■ عملگر جایگشت را به فرم زیر در نظر بگیرید:

$$P := \sum_{i,j} |i,j\rangle\langle j,i|. \tag{۱۸۹}$$

ویژه بردارهای و ویژه مقدارهای این عملگر را در یک بعد دلخواه پیدا کنید.

■ با انتخاب یک پایه متعامد و یکه برای فضای عملگرهای خطی مثل E_r می توانیم یک کانال را به صورت زیر نیز بنویسیم:

$$\mathcal{E}(\rho)=\sum_n A_n\rho A_n^\dagger=\sum_{r,s}\chi_{r,s}E_r\rho E_s^\dagger. \tag{۱۹۰}$$

این نوع نمایش کانال را نمایش χ [۲۱] می خوانند. نشان دهید که نمایش χ در یک پایه خاص بر خلاف نمایش کراوس یکتاست.

■ نشان دهید که برای یک کانال کوانتومی، ماتریس χ یک ماتریس مثبت است.

■ کانال کیوبیتی زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E}(\rho)=\eta\rho+(1-\eta)(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\rho(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}). \tag{۱۹۱}$$

برای این کانال کمیت های زیر را حساب کنید:

یک ـ ماتریس چوی‌ـ‌یامیولکوسکی،

دوـ‌تشابه درهم تنیدگی.

■ کانال کوانتومی زیر را در نظر بگیرید:

$$T(\rho):=\int(U\otimes U)\rho(U^\dagger\otimes U^\dagger)dU \tag{۱۹۲}$$

که در آن انتگرال روی ماتریس های یکانی گرفته می شود و اندازه انتگرال که اصطلاحا اندازه هار [۲۲] خوانده می شود دارای این خاصیت است

$$d(VU)=d(UV)=dU \qquad \text{For every fixed U.}$$

نشان دهید که

$$T(\rho)=a^+(\rho)P_+ + a^-(\rho)P_-, \tag{۱۹۳}$$

که در آن P_+ و P_- به ترتیب تصویرگرهای روی زیرفضاهای متقارن و پادمتقارن از $H\otimes H$ هستند. در این جا منظور از تقارن، تقارن نسبت به گروه جایگشت است. سپس نشان دهید که

$$T(\rho)=\frac{Tr(P_+\rho)}{d_+}P_+ + \frac{Tr(P_-\rho)}{d_-}P_-, \tag{۱۹۴}$$

---

[۲۱] χ-representation

[۲۲] Harr Measure

که در آن $d_\pm$ بعد زیرفضاهای متقارن و نا متقارن هستند.

- کانال پاوولی را با تعریف $\mathcal{E}(\rho) = \sum_{i=0}^{3} p_i\sigma_i\rho\sigma_i$ در نظر بگیرید. آیا این کانال می تواند یک یک کانال شکننده درهم تنیدگی [۲۳] باشد.

- نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E}(\rho) = \lambda\rho^T + (1-\lambda)\frac{I}{d}, \tag{۱۹۵}$$

که در آن ρ^T به معنای ترانهاده ρ در یک پایه معین است. نشان دهید که در محدوده $\frac{-1}{d-1} \leq \lambda \leq \frac{1}{d+1}$ این نگاشت یک کانال کوانتومی را تعریف می کند. هم چنین نشان دهید که این کانال دارای خاصیت زیر است:

$$\mathcal{E}(U\rho U^\dagger) = U^*\mathcal{E}(\rho)U^T. \tag{۱۹۶}$$

- **تمرین:** یک معادله لیندبلد به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2}\big(\gamma_+\mathcal{L}_+ + \gamma_-\mathcal{L}_-\big). \tag{۱۹۷}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_+(\rho) &= [\sigma_+, \rho\sigma_-] + [\sigma_+\rho, \sigma_-] \\
\mathcal{L}_-(\rho) &= [\sigma_-, \rho\sigma_+] + [\sigma_-\rho, \sigma_+].
\end{aligned} \tag{۱۹۸}$$

$\rho(t)$ را بر حسب $\rho(0)$ بنویسید. حالت پایای این دینامیک را یعنی حالت سیستم وقتی زمان به سوی بی نهایت می رود را پیدا کنید.

- **تمرین:** یک معادله لیندبلد به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}_t(\rho) = \frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{3}(\sigma_k\rho\sigma_k - \rho), \tag{۱۹۹}$$

[۲۳] Entanglement Breaking Channel

نشان دهید که

$$\rho_t(\rho) = \sum_{\alpha=0}^{3} p_\alpha(t)\sigma_\alpha\rho\sigma_\alpha, \tag{۲۰۰}$$

که در آن

$$\begin{aligned} p_0(t) &= \frac{1}{4}\big(1+\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\lambda_3(t)\big)\\ p_1(t) &= \frac{1}{4}\big(1+\lambda_1(t)-\lambda_2(t)-\lambda_3(t)\big)\\ p_2(t) &= \frac{1}{4}\big(1-\lambda_1(t)+\lambda_2(t)-\lambda_3(t)\big)\\ p_3(t) &= \frac{1}{4}\big(1-\lambda_1(t)-\lambda_2(t)+\lambda_3(t)\big). \end{aligned} \tag{۲۰۱}$$

در این رابطه ها $\lambda_i(t)$ برابر است با:

$$\lambda_i(t) = e^{-\Gamma_j(t)-\Gamma_k(t)} \tag{۲۰۲}$$

و

$$\Gamma_k(t) = \int_0^t \gamma_k(\tau)d\tau. \tag{۲۰۳}$$

۱۳ قدردانی

این درسنامه را آقای حسین محمدی دانشجوی دانشکده فیزیک در آذرماه ۱۴۰۱ به دقت خوانده و اشکالات متعدد آن را به من یادآوری کردند. برای این لطف بزرگ از ایشان تشکر می کنم.